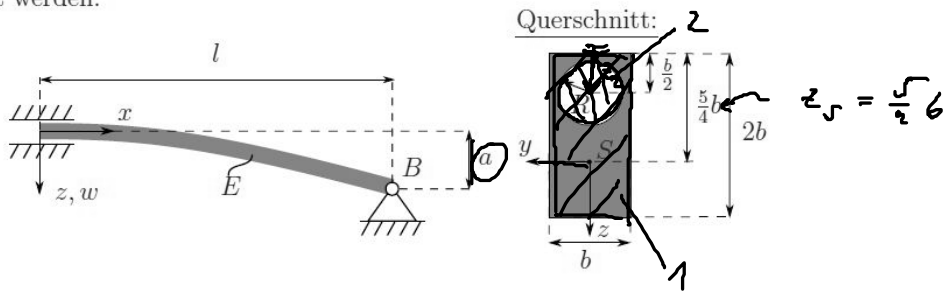


14. Übung

1. Ein Träger (Länge l , E-Modul E und skizzierter Querschnitt) soll wie dargestellt gelagert sein. Durch Einbaufehler (Vorspannung) ist das Lager an der Stelle B um a abgesenkt. Im Folgenden sollen die Auswirkungen des Einbaufehlers auf das Bauteil bestimmt werden.



- (a) Bestimmen Sie das axiale Flächenträgheitsmoment I_y des rechteckigen Profils (Breite b , Höhe $2b$) mit kreisförmiger Aussparung (Radius $R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}b$) bezüglich des eingezeichneten Schwerpunktkoordinatensystems.

Hinweis: Benutzen Sie für die Rechnungen in (b)-(e) als Abschätzung:

$$I_y = \frac{1}{3} b^4$$

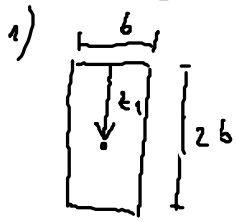
- (b) Bestimmen Sie die Absenkung des Balkens $w(x)$.
 (c) Wie groß ist die Lagerkraft in z -Richtung in B ?
 (d) Wo tritt die maximale Zug-, und wo die maximale Druckspannung auf?
 (e) Wie groß darf a höchstens sein, damit die zulässige Zugspannung σ_{zul} nicht überschritten wird?

Geg.: $l, E, a, R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}b, b, \sigma_{zul}$

a) $I_{yy} = \sum_i I_{yyi} + \sum_i z_{si}^2 A_i \Rightarrow$ Tabellenverfahren

i	A_i	z_i	$z_{si} = z_s - z_i $	$z_{si}^2 A_i$	I_{yyi}
1	$2b^2$	b	$ \frac{5}{4}b - \frac{4}{4}b = \frac{1}{4}b$	$\frac{1}{16}b^2 \cdot 2b^2 = \frac{1}{8}b^4$	$\frac{2}{3}b^4$
2	$\frac{\pi}{3\pi}b^2 = \frac{2}{3\pi}b^2$	$\frac{6}{2}$	$ \frac{5}{4}b - \frac{2}{4}b = \frac{3}{4}b$	$\frac{9}{16}b^2 \cdot \frac{2}{3}b^2 = \frac{3}{8}b^4$	$-\frac{1}{3\pi}b^4$

* A_2 ist Bohrung



$$z_s = \frac{\sqrt{2}}{2} b \quad \text{Gesamtschwerpunkt}$$

$$\bar{I}_{yy1} = \frac{1}{12} BH^3 = \frac{1}{12} b (2b)^3 = \frac{8}{12} b^4 = \frac{2}{3} b^4$$

2)



$$R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} b$$

$$\bar{I}_{yy2} = -\frac{\pi}{4} R^4 = -\frac{\pi}{4} \left(\left(\frac{2}{3\pi} \right)^{1/2} b \right)^4 = -\frac{\pi}{4} \frac{2^2}{3^2 \pi^2} b^4 = -\frac{1}{9\pi} b^4$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \bar{I}_{yy} = \frac{2}{3} b^4 - \frac{1}{9\pi} b^4 + \frac{1}{8} b^4 - \frac{2}{8} b^4 = \frac{5}{12} b^4 - \frac{1}{9\pi} b^4 //$$

b) gest. $w(x)$

$$(EI w'')'' = q(x)$$

$$EI w'''' = 0$$

$$EI w''' = c_1$$

$$EI w'' = c_1 x + c_2$$

$$EI w' = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$EI w = \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + \frac{c_3}{3} x + c_4$$

ROA:

$$w(x=L) = a \quad (1)$$

$$w(x=0) = 0 \quad (2)$$

$$M(x=L) = 0 \quad (3) \Rightarrow -EI w''(L) = 0$$

$$w'(x=0) = 0 \quad (4)$$

$$(2): 0 = c_4 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$(4): 0 = c_3 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$(1): EI \cdot a = \frac{1}{6} c_1 L^3 + \frac{1}{2} c_2 L^2 \Rightarrow EI a = \frac{1}{6} c_1 L^3 - \frac{1}{2} c_1 L^3 = -\frac{1}{3} c_1 L^3$$

$$(3): 0 = c_1 L + c_2 \Rightarrow c_2 = -c_1 L$$

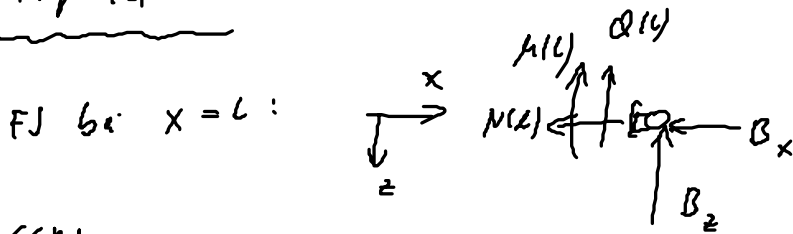
$$\Rightarrow c_1 = -\frac{3EIa}{L^3}, \quad c_2 = \frac{3EIa}{L^2}$$

damit:

$$W(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 \right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{3EIa}{6l^3} x^3 + \frac{3EIa}{2l^2} x^2 \right)$$

$$W(x) = -\frac{1}{2} \frac{a}{l^3} x^3 + \frac{3}{2} \frac{a}{l^2} x^2$$

c) Kraft in B:

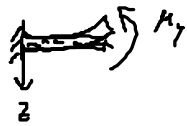


GGB:

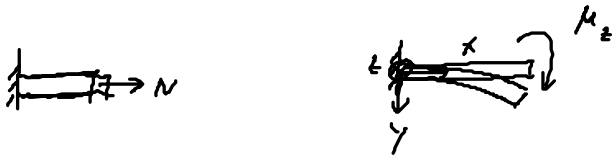
$$z: 0 = -B_2 - Q(l) \Rightarrow B_2 = -Q(l) = -(-EI W'''(l)) = C_1 = -\frac{3EIa}{l^3}$$

$$\text{mit } I_y = \frac{1}{3} b^3 \Rightarrow B_2 = -\frac{3EIa}{l^3} \frac{1}{3} b^3 = -\frac{Eab^3}{l^3}$$

d) σ_{\max} :



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$



$$\text{mit: } \sigma = \frac{M_y}{I_y} z$$

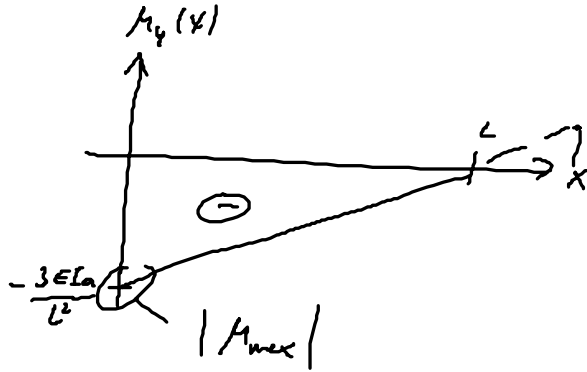
① Wo ist M_y maximal

② Wo ist z maximal \Rightarrow Randfaser

①

$$\text{mit: } M_y = -EI W''(x) = -(c_1 x + c_2) = \frac{3EIa}{l^3} x - \frac{3EIa}{l^2}$$

Vorlief:

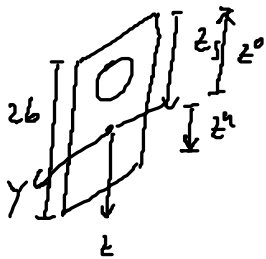


$$M(0) = -\frac{3EIa}{l^2}$$

$$M(l) = 0$$

\Rightarrow maximales M_{max} $|M_{\text{max}}|$ bei $x = 0$

②



Randwert: oben: $\sigma^0 = -z_1 = -\frac{5}{4}b$

unten: $\sigma^a = 2b - z_2 = \frac{8}{4}b - \frac{5}{4}b = \frac{3}{4}b$

damit: $\sigma_{\text{max}} = -\frac{3EIa}{l^2 I} \cdot z^{0/1}$

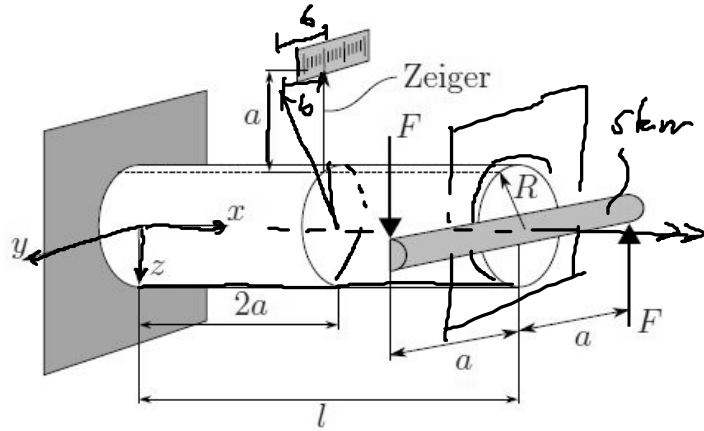
$$\Rightarrow \sigma_{\text{max}}^0 = -\frac{3Ea}{l^2} \cdot z^a = -\frac{3Ea}{l^2} \cdot \frac{3}{4}b = -\frac{9Eab}{l^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{max}}^2 = -\frac{3Ea}{l^2} \cdot z^0 = \frac{3Ea}{l^2} \cdot \frac{5}{4}b = \frac{15Eab}{l^2}$$

Ergebnis: Maximale Zugschpannung bei $x=0, z = -\frac{5}{4}b$

Maximale Druckspannung bei $x=0, z = \frac{3}{4}b$

2. Eine Vorrichtung zur Messung des Schubmoduls G ist wie dargestellt aufgebaut. An eine vollzylindrische Welle (Radius R , Länge l), welche links fest eingespannt ist, ist am rechten Ende eine starre Stange (Länge $2a$) mittig befestigt. Diese wird an jedem Ende mit einer Kraft F belastet. An der Position $x = 2a$ ist eine Ablesevorrichtung in Form eines Zeigers der Länge a montiert, die anzeigt wie weit sich der Zeigestab aufgrund der Torsion der Welle verschiebt. Vorausgesetzt seien kleine Verformungen der Welle.

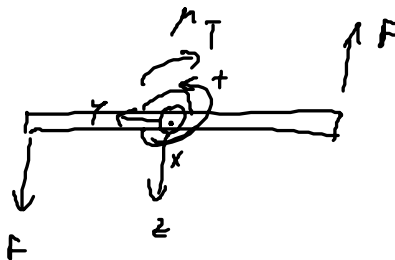
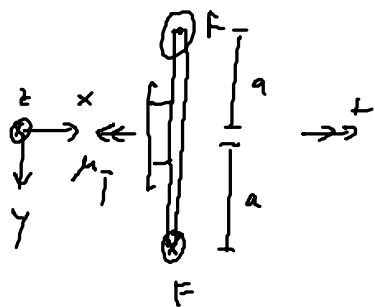


- (a) Bei Torsion der Welle zeigt die Ablesevorrichtung eine Verschiebung b in Richtung des positiven Verdrehwinkels an. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen F und dem Abstand b auf. Wie kann daraus der Schubmodul G bestimmt werden?
- (b) Um Gewicht zu sparen soll die Welle als Hohlwelle mit identischem Außenradius R gefertigt werden. Wie groß muss der Innenradius R_i gewählt werden um eine Gewichtseinsparung von 25% zu erzielen? Welches Verhältnis ergibt sich dann für die polaren Flächenträgheitsmomente $I_{p,voll}/I_{p,hohl}$?

Geg.: l, a, R, b, F

a) Torsion: $M_T = G I_p \theta' = G I_p \frac{d\theta}{dx}$ - MSH für Torsion

1) FS:



GGB:

$$M_x^s: 0 = -M_T + Fa + Fa$$

$$\Rightarrow M_T = 2Fa \quad (1)$$

2) MSH: $M_T = G I_p \frac{d\theta}{dx} \quad (2)$

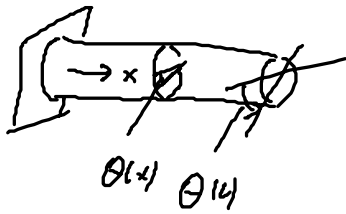
$$\Rightarrow (1): 2Fa = G I_p \frac{d\theta}{dx} \quad | \cdot dx, \frac{1}{G I_p}$$

$$\frac{2Fa}{G I_p} dx = d\theta \quad | \int (-)$$

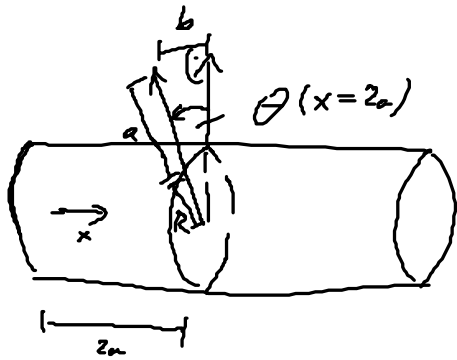
$$\theta(x) = \int \frac{2Fa}{G I_p} dx = \frac{2Fa}{G I_p} \cdot x + C_1 \quad (3)$$

2) Kinematik:

Man für $\Theta(x)$: $\Theta(x=0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$



damit: $\Theta(x) = \frac{2F_a}{6I_p} x \quad (3)$



$$b = (a + R) \sin(\Theta(2a))$$

$\sin(\Theta(2a)) = \frac{b}{a+R}$
 $\Theta(2a) = \frac{b}{a+R} \quad (4)$

4) Aufg. 2:

(3) in (4): $\frac{2F_a}{6I_p} 2a = \frac{b}{a+R}$

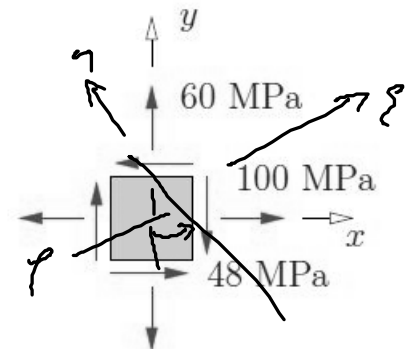
$\frac{4a^2}{6I_p} F = \frac{b}{a+R}$

nach G auflösen: $\frac{4a^2}{I_p} F \frac{a+R}{6} = G$

3.

Der Spannungszustand an einem Punkt in einer dünnen Stahlplatte ist nebenstehend abgebildet. Bestimmen Sie

- (a) die Hauptrichtungen und Hauptspannungen,
- (b) die maximale Schubspannung und
- (c) die Spannungskomponenten für ein Element, das aus dem abgebildeten durch Drehung um 30° entgegen dem Uhrzeigersinn entsteht.



Tut: Wiederholung, siehe Homepage; Ha: -

Aufgabe 3

(a)

1. Hauptspannung σ_{H1}

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (31)$$

2. Hauptspannung σ_{H2}

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (32)$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 80 \text{ MPa} \quad (33)$$

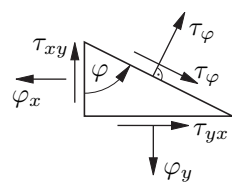
$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 52 \text{ MPa} \quad (34)$$

Ergebnis:

$$\underline{\sigma_{H1}} = 80 \text{ MPa} + 52 \text{ MPa} = 132 \text{ MPa} > \sigma_x \quad (35)$$

$$\underline{\sigma_{H2}} = 80 \text{ MPa} - 52 \text{ MPa} = \underline{28 \text{ MPa}} < \sigma_y \quad (36)$$

Hauptrichtung φ_H :



Aus GGW am Flächenelement ist die Schubspannung τ_φ :

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (37)$$

Bedingung für φ_H :

$$\tau_\varphi \stackrel{!}{=} 0 \quad (38)$$

↓

$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (39)$$

$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan(-2,4) = -0,588 \hat{=} -33,6^\circ \quad (40)$$

(b) max. Schubspannung:

$$\left[\text{bei } \varphi_{\tau_{\max}} = \frac{\pi}{4} + \varphi_H = 11,31^\circ \right] \quad (41)$$

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (42)$$

$$= \pm \left(\frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}\right) = \pm 52 \text{ MPa} \quad (43)$$

(c) Spannungskomponenten im Koordinatensystem \tilde{x}, \tilde{y} unter $\varphi = 30^\circ$ zum x, y -System:

$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (44)$$

$$= 80 \text{ MPa} + 20 \text{ MPa} \cos 60^\circ - 48 \text{ MPa} \sin 60^\circ$$

$$= 48,43 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (45)$$

$$= -20 \text{ MPa} \sin 60^\circ - 48 \text{ MPa} \cos 60^\circ$$

$$= -41,32 \text{ MPa}$$

Die Spur des Spannungstensors (die Summe der Hauptdiagonalelemente der entsprechenden Matrix) ist invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems. (Ebenso die Determinante, aber das wird hier nicht ausgenutzt.)

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\tilde{x}} + \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{H1} + \sigma_{H2} \quad (46)$$

$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{\tilde{x}} = 111,57 \text{ MPa} \quad (47)$$

Grafische Lösung:

