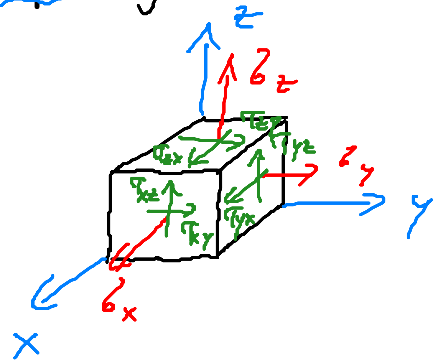
Probeklausur: Dienstag 10.02.2015 von 18:15 – 20:00 im H 104

1) Spannungen



σ : Normalspannungen

τ : Schubspannungen / Tangentialspannungen

τ_{ij}

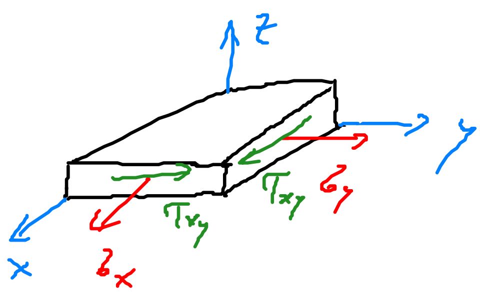
i: Flächen-Normale

j: Richtung der Spannung

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} := \text{Spannungstensor}$$

mit: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (Symmetrisch!)

2) Ebener Spannungszustand

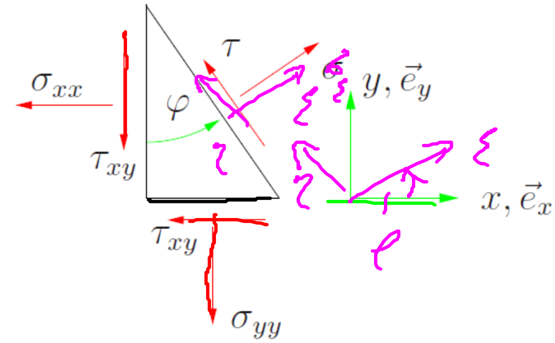


$\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Aufgabe 137

Der dargestellte Scheibenausschnitt steht unter der Wirkung der eingezeichneten Spannungen. Leite in diesem allgemeinen Fall die Gleichungen für den MOHRschen Spannungskreis her!



δ ist bekannt

(a) Fordere das Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und bestimme daraus möglichst einfache Gleichungen für σ und τ! Benutze Additionstheoreme!

(b) Erzeuge durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen eine Kreisgleichung!

(c) Identifiziere den Mittelpunkt, den Radius, die maximale Schubspannung und die Hauptnormalspannungen!

a) aus GGBen:

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) + \tau_{xy}\sin(2\varphi) \qquad (1)$$

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) - \tau_{xy}\sin(2\varphi) \qquad (2)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\varphi) + \tau_{xy}\cos(2\varphi) \qquad (3)$$

(1), (2), (3) sind die Transformationsgleichungen!

b) MOHRscher Kreis:

$$\left[(1) - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + (3)^2 :$$

$$\left[\sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \dots$$

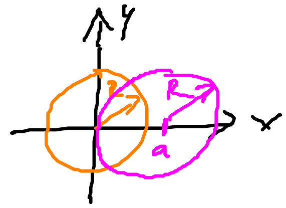
$$+ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cancel{\cos^2(2\varphi)} \pm \cancel{(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi)\tau_{xy}\sin(2\varphi)} + \tau_{xy}^2 \cancel{\sin^2(2\varphi)}$$

$$+ \cancel{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2(2\varphi)}^{*} - \cancel{(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\varphi)\tau_{xy}\cos(2\varphi)} + \cancel{\tau_{xy}^2 \cos^2(2\varphi)}^{*}$$

$*\quad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$$\left[\sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Kreisgleichung:

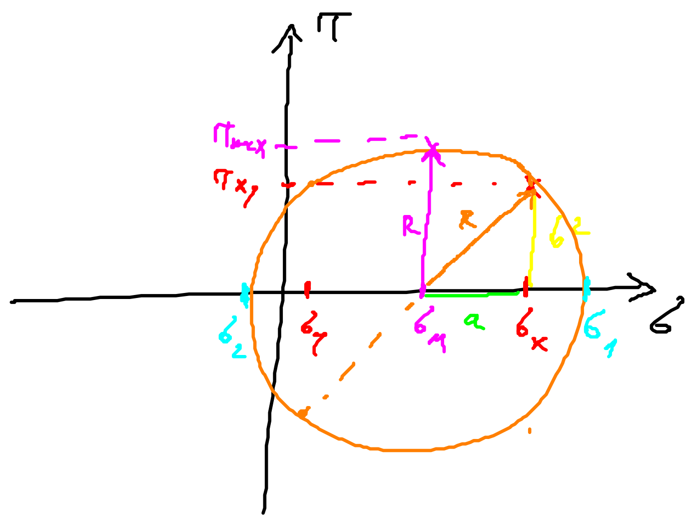


$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (\sigma - \sigma_M)^2 + \tau^2 = R^2$$ – Kreisgleichung für MOHRschen Kreis!

c) MOHRscher Kreis:



$$(\sigma - \sigma_M)^2 + \tau^2 = R^2$$

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

gegeben: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$$R^2 = a^2 + b^2$$
$$= (\sigma_x - \sigma_M)^2 + \tau_{xy}^2$$
$$= \left(\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2$$
$$R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

1) Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \sigma_M + R = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_M - R = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

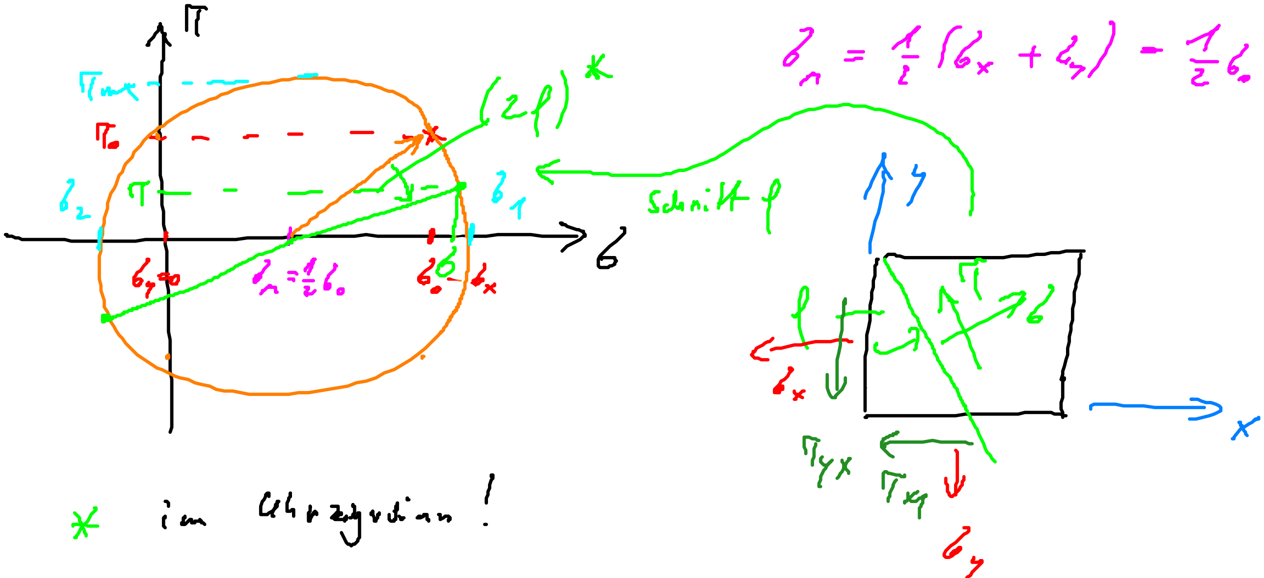
$\sigma_{1/2}$:= Hauptspannungen: Normalspannung maximal, $\tau = 0$

2) maximale Schubspannung

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Mohrscher Kreis:

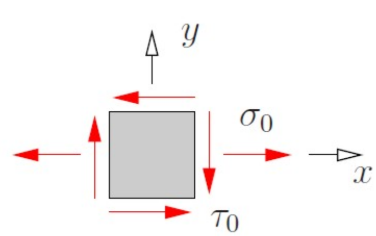
$\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_0$ gegeben



* im Uhrzeigersinn!

Aufgabe 136

Der untersuchte ebene Spannungszustand besteht aus einer Normalspannung $\sigma_0 = 100$ MPa in Richtung der x-Achse und einer noch unbekannten Schubspannung τ_0.



(a) Bestimmen Sie den Betrag der Schubspannung τ_0, so daß die größte Normalspannung 100 MPa beträgt.

(b) Wie groß ist nun die maximale Schubspannung?

geg: $\sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_y = 0$

a) ges: τ_0, so dass $\sigma_1 = 100\,\text{MPa} = \sigma_0$

$$\sigma_{1/2} = \sigma_m \pm R$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

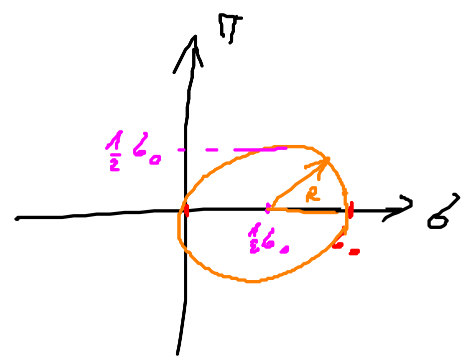
einsetzen:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\sigma_0 + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_0\right)^2 = \cancel{\sqrt{}}\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = 0$$

b) ges: τ_{max}

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



einsetzen:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + 0} = \frac{\sigma_0}{2}$$

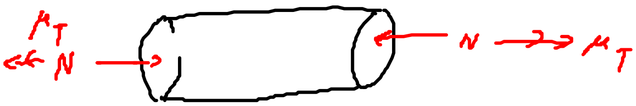
Aufgabe 138

Ein dünnwandiges Rohr mit dem Außendurchmesser d, das aus einem wendelförmig gewickelten und verschweißten Stahlband der Breite b gefertigt ist, dient zum Übertragen eines Torsionsmomentes und einer axialen Druckkraft. In einem Schnitt senkrecht zur Rohrachse treten dabei die Druckspannung σ_D und die Schubspannung τ auf.

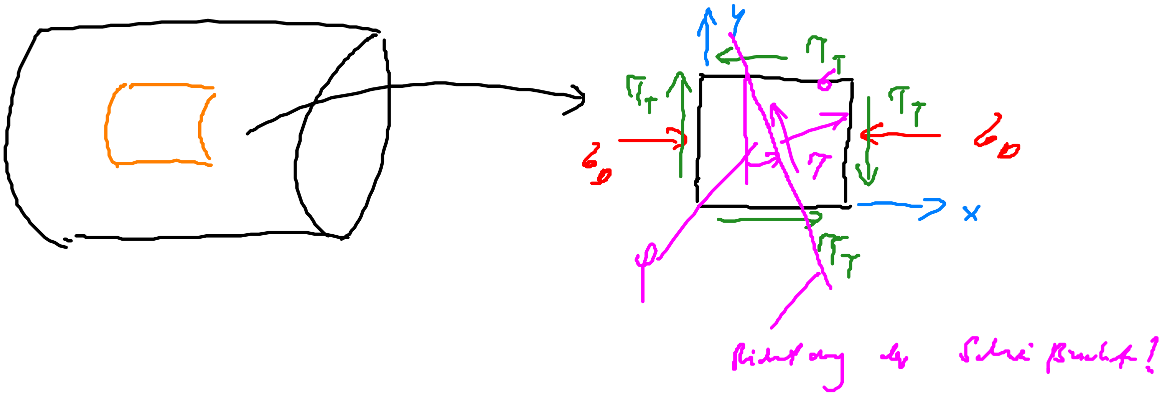
(a) Bei welchem Verhältnis σ_D/τ_T wird die Schweißnaht nicht auf Schub beansprucht?

(b) Wie groß sind im Fall (a) die Normalspannungen in der Schweißnaht?

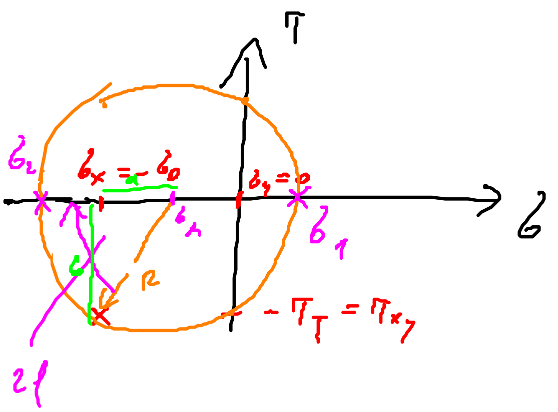
Geg.: $d = 240$ mm, $b = 360$ mm, $\sigma_D = 4000\ \text{N/mm}^2$



a) ges: $\dfrac{\sigma_D}{\tau_T}$, so dass $\tau = 0$ in Schweißnaht!



$\Rightarrow$ Es gelten alle Gleichungen von davor!



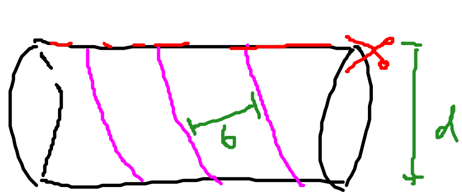
ges: $\sigma_x = -\sigma_D$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = -\tau_T$

$$\tan(2\varphi) = \frac{b}{a} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_m}$$

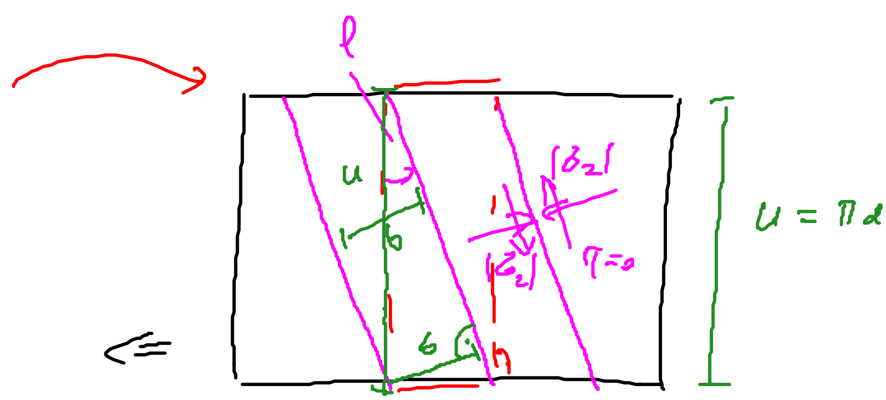
$$\tan(2\varphi) = \frac{-\tau_T}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{-2\tau_T}{-\sigma_D} = \frac{2\tau_T}{\sigma_D}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_D}{\tau_T} = \frac{2}{\tan(2\varphi)}$$

mit φ:



$$\frac{b}{u} = \sin(\varphi) \quad \Leftarrow$$



$$\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{u}\right) = \arcsin\left(\frac{360\ mm}{\pi \cdot 240\ mm}\right) \approx 28{,}5^\circ$$

damit:
$$\frac{\sigma_0}{\tau_T} = \frac{2}{\tan\left(2 \cdot 28{,}5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right)} \approx 1{,}3$$

b) ges: $\sigma_{1/2}$

$$\sigma_{1/2} = \sigma_m \pm R = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

mit: $\sigma_0 = 4000\ N/mm^2$

$$\sigma_1 = 1676\ N/mm^2$$

$$\sigma_2 = -5676\ N/mm^2$$