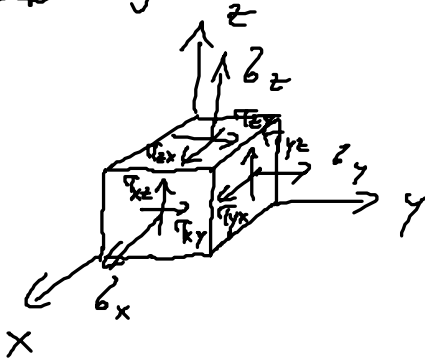


Probeklausur: Dienstag 10.02.2015 von 18:15 - 20:00 im H 104

1) Spannungen



σ : Normalspannungen

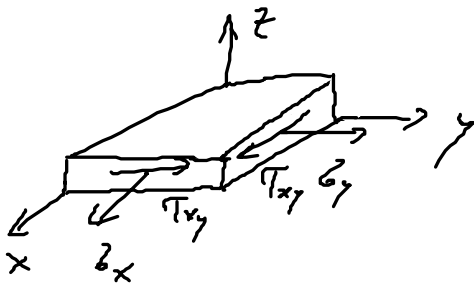
τ : Schubspannungen / Tangentialspannungen

τ_{ij}
 Flächen-Normale \quad Richtung der Spannung

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} := \text{Spannungstensor}$$

mit: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (symmetrisch!)

2) Ebene Spannungszustand



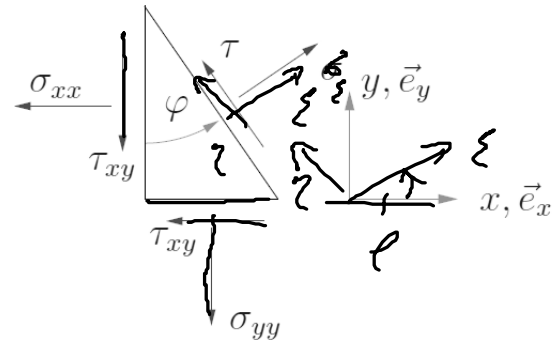
$$\sigma_z = 0, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Aufgabe 137

Der dargestellte Scheibenausschnitt steht unter der Wirkung der ingezeichneten Spannungen. Leite in diesem allgemeinen Fall die Gleichungen für den MOHRschen Spannungskreis her!

ρ ist bekannt



- Fordere das Kräftegleichgewicht in x - und y -Richtung und bestimme daraus möglichst einfache Gleichungen für σ und τ ! Benutze Additionstheoreme!
- Erzeuge durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen eine Kreisgleichung!
- Identifiziere den Mittelpunkt, den Radius, die maximale Schubspannung und die Hauptnormalspannungen!

a) aus GG in:

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi) \quad (1)$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi) \quad (2)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \cos(2\varphi) \quad (3)$$

(1), (2), (3) sind die Transformationsgleichungen!

b) MOHRscher Kreis:

$$\left[(1) - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 + (3)^2 :$$

$$\left[\sigma_{\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \dots$$

$$+ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2(2\varphi) + \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\varphi) \tau_{xy} \sin(2\varphi)}{\cancel{\cos^2(2\varphi)}} + \tau_{xy}^2 \sin^2(2\varphi)$$

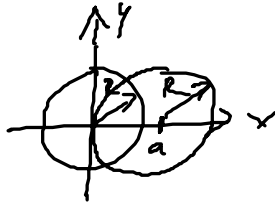
$$+ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2(2\varphi) = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\varphi) \tau_{xy} \cos(2\varphi)}{\cancel{\sin^2(2\varphi)}} + \tau_{xy}^2 \cos^2(2\varphi)$$

$$* \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Kreisgleichung:

$$x^2 + y^2 = R^2$$



$$(x-a)^2 + y^2 = R^2$$

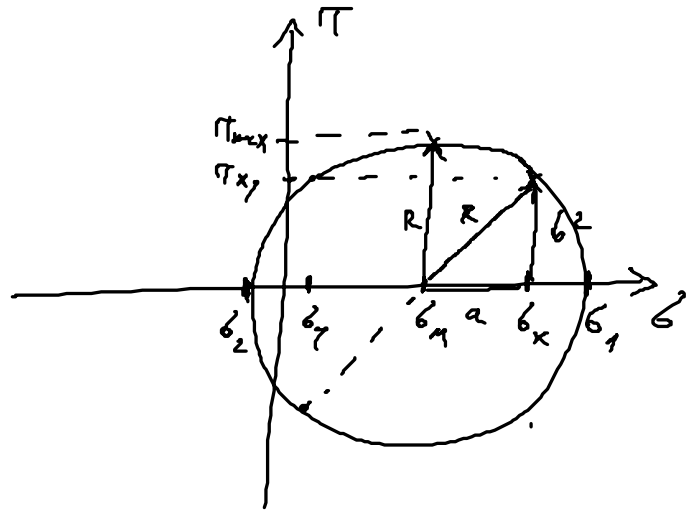
$$\Rightarrow (\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 = R^2 \quad \text{- Kreisgleichung für MOHR'schen Kreis!}$$

c) MOHR'scher Kreis:

$$(\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 = R^2$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



gegeben: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$$R^2 = a^2 + b^2$$

$$= (\sigma_x - \sigma_m)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$= \left(\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

1) Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \sigma_m + R = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m - R = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

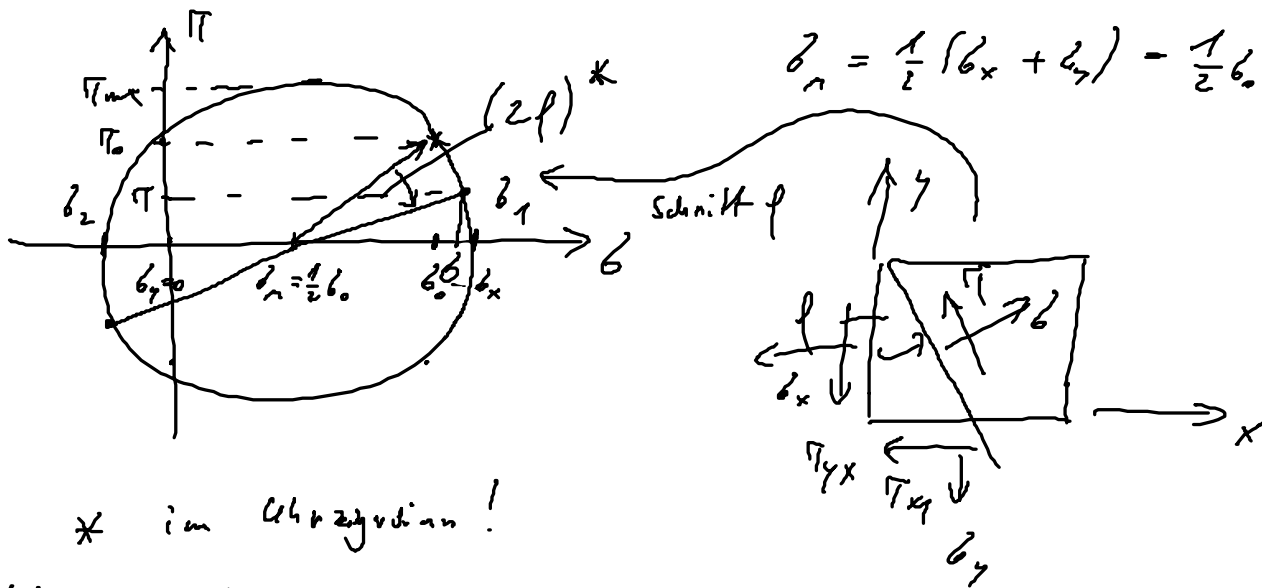
$\sigma_{1/2}$:= Hauptspannungen: Normalspannung maximal, $\tau = 0$

2) Maximale Schubspannung

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

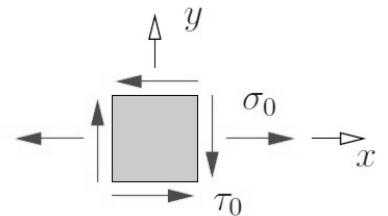
Modul des Kreis:

$\sigma_x = \sigma_0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_0$ gegeben



Aufgabe 136

Der untersuchte ebene Spannungszustand besteht aus einer Normalspannung $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$ in Richtung der x -Achse und einer noch unbekanntem Schubspannung τ_0 .



- (a) Bestimmen Sie den Betrag der Schubspannung τ_0 , so daß die größte Normalspannung 100 MPa beträgt.
- (b) Wie groß ist nun die maximale Schubspannung?

geg: $\sigma_x = 100 \text{ MPa}, \sigma_y = 0$

a) ges: σ_0 , so dass $\sigma_1 = 100 \text{ MPa} = \sigma_0$

$$\sigma_{1/2} = \sigma_n \pm R$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

einsetzen:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\sigma_0 + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2}$$

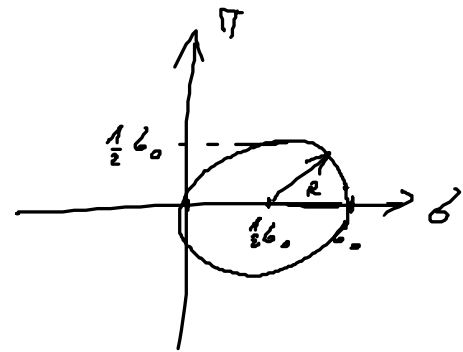
$$\left(\frac{1}{2}\sigma_0\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} \Rightarrow \tau_0 = 0 //$$

b) ges: τ_{max}

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

einsetzen:

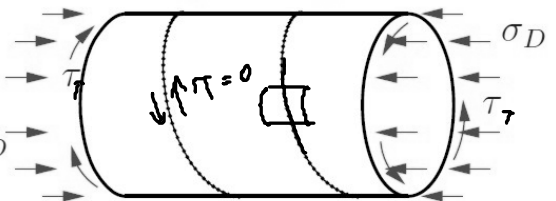
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + 0} = \frac{\sigma_0}{2} //$$



Aufgabe 138

Ein dünnwandiges Rohr mit dem Außendurchmesser d , das aus einem wendelförmig gewickelten und verschweißten Stahlband der Breite b gefertigt ist, dient zum Übertragen eines Torsionsmomentes und einer axialen Druckkraft. In einem Schnitt senkrecht zur Rohrachse treten dabei die Druckspannung σ_D und die Schubspannung τ auf.

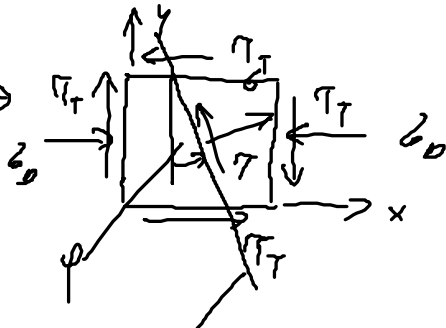
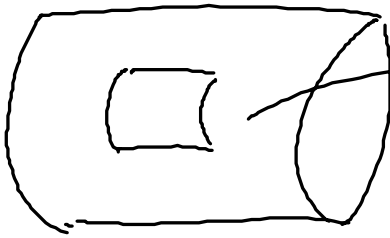
- Bei welchem Verhältnis σ_D/τ wird die Schweißnaht nicht auf Schub beansprucht?
- Wie groß sind im Fall (a) die Normalspannungen in der Schweißnaht?



Geg.: $d = 240 \text{ mm}$, $b = 360 \text{ mm}$, $\sigma_D = 4000 \text{ N/mm}^2$

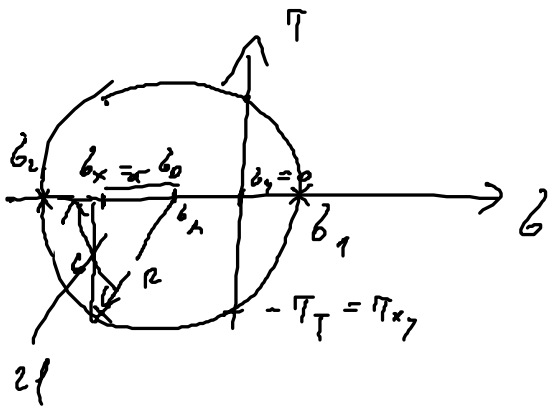


a) ges: $\frac{\sigma_D}{\tau_T}$, so dass $\tau = 0$ in Schweißnaht!



Richtung der Schweißnaht!

=> Ergebnis alle Gleichungen von davor!



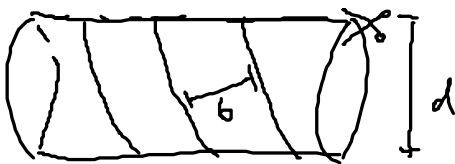
gg: $\sigma_x = -\sigma_D, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = -\tau_T$

$$\tan(2\varphi) = \frac{b}{a} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_m}$$

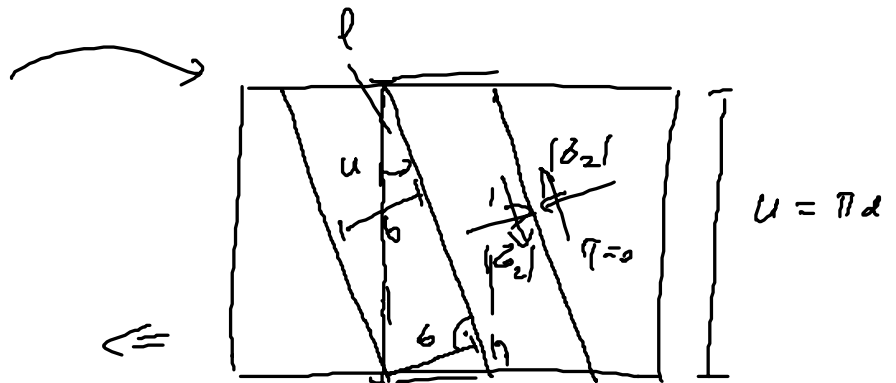
$$\tan(2\varphi) = \frac{-\tau_T}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{-2\tau_T}{-\sigma_D} = \frac{2\tau_T}{\sigma_D}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_D}{\tau_T} = \frac{2}{\tan(2\varphi)}$$

mit phi:



$$\frac{b}{u} = \sin(\varphi)$$



$$\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{360 \text{ mm}}{\pi \cdot 240 \text{ mm}}\right) \approx \underline{\underline{28,5^\circ}}$$

dansiti: $\frac{\sigma_0}{\tau_T} = \frac{2}{\tan\left(2 \cdot 28,5^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right)} \approx \underline{\underline{1,3}}$

b) ges: $\sigma_{1/2}$

$$\sigma_{1/2} = \sigma_n \pm R = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

mit: $\sigma_0 = 9000 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_1 = 1676 \text{ N/mm}^2 //$$

$$\sigma_2 = -5676 \text{ N/mm}^2 //$$