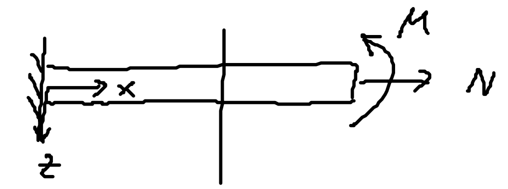
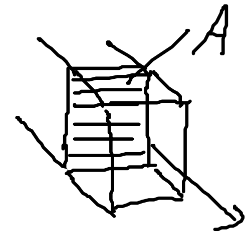
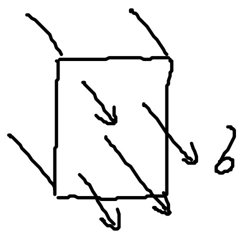
12. Übung: Spannungsverteilung



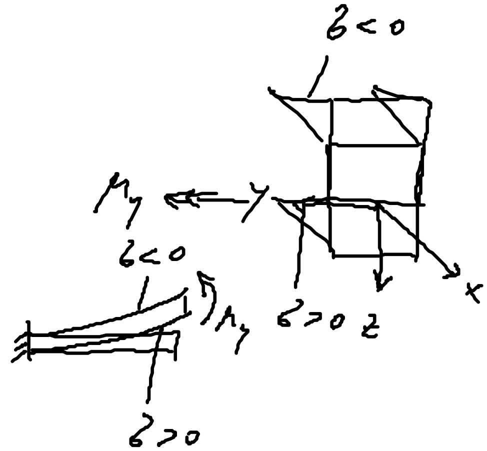
Normalkraft:



$$\sigma = \frac{N}{A}$$



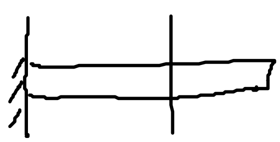
Biegemoment:

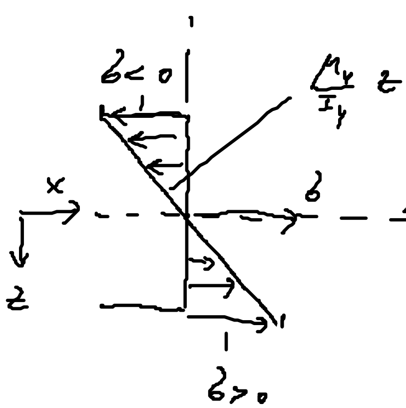


$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

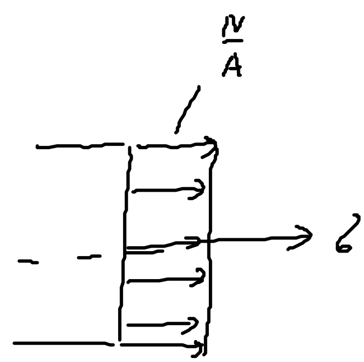
Überlagerung:

$$\sigma_{ges} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

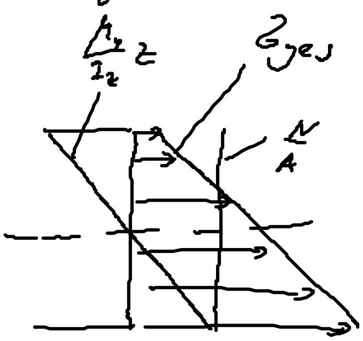




neutrale Faser



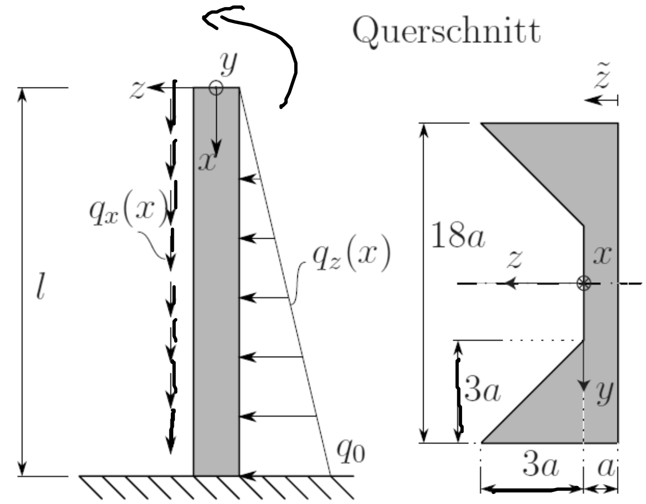
Überlagerung:



⇒ Im Buch!

Z2

Eine Lawinenverbauung habe den gezeigten Querschnitt und die Länge $l = 100a$. Neben der Geröllast $q_z(x)$, die als eine linear bis auf q_0 anwachsende Streckenlast in die z-Richtung modelliert wird, wirkt in die Längsrichtung das konstante längenbezogene Eigengewicht $q_x(x) = \frac{27}{40} q_0$.



(a) Bestimmen sie die Lage des Flächenschwerpunkts des Querschnitts bzgl. der eingezeichneten Koordinate $\tilde{z}$.

(b) Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_{yy} des Gesamtquerschnitts bzgl. der y-Achse welche durch den Flächenschwerpunkt verläuft?

(c) Ermitteln Sie den Verlauf der Normalkraft $F_n(x)$, der Querkraft $F_q(x)$ und des Biegemoments $M_b(x)$.

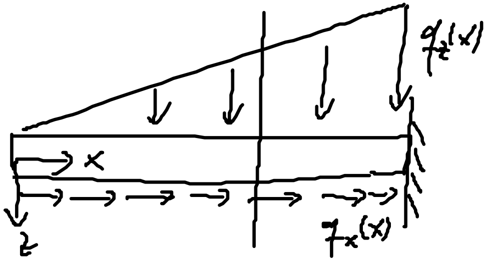
(d) Skizzieren Sie den Verlauf der Biegenormalspannung in der Einspannung ($x = l$). Bestimmen Sie dabei auch die (betragsmäßigen) Maximalwerte der Druck- und Zugspannung $\sigma_{\text{max,Druck}}$ bzw. $\sigma_{\text{max,Zug}}$. Vereinfachend sei angenommen, dass das Flächenträgheitsmoment bzgl. der y-Achse den Wert $I_{yy} \doteq 20a^4$ habe.

Geg.: a, $l = 100a$, q_0, $q_x(x) = \dfrac{27}{40} q_0$

a) Tabellenverfahren: $z_s = a$

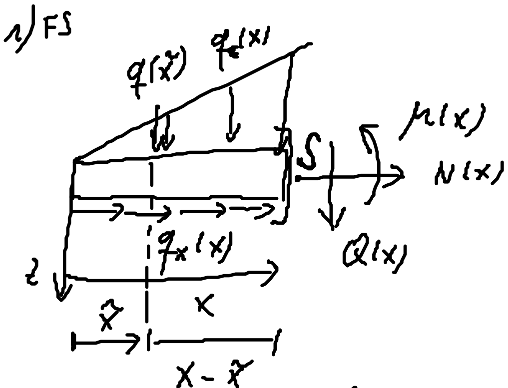
b) erweitertes Tabellenverfahren: $I_y = \frac{22}{12} a^4$

c) Schnittkräfte im Balken



Gabelschnittverfahren:

1) FS



2) GGB:

$$x: \quad 0 = N(x) + \int_0^x q_x(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

$$N(x) = -\int_0^x \frac{27}{90} q_0 \, d\tilde{x} = -\left[\frac{27}{90} q_0 \tilde{x}\right]_0^x$$

$$N(x) = -\frac{27}{90} q_0 x$$

$$z: \quad 0 = Q(x) + \int_0^x q_z(\tilde{x})\, d\tilde{x} \Rightarrow Q(x) = -\int_0^x \frac{q_0}{L}\tilde{x}\, d\tilde{x} = -\left[\frac{q_0}{2L}\tilde{x}^2\right]_0^x$$

$$Q(x) = -\frac{q_0}{2L} x^2$$

$$M^S: \quad 0 = M(x) + \int_0^x \overbrace{q_z(\tilde{x})\,(x-\tilde{x})}^{dM}\, d\tilde{x}$$

$$\Rightarrow M(x) = -\int_0^x \frac{q_0}{L}\tilde{x}(x-\tilde{x})\, d\tilde{x} = -\frac{q_0}{L}\left[\frac{1}{2}x\tilde{x}^2 - \frac{1}{3}\tilde{x}^3\right]_0^x$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{L}\left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^3\right] = -\frac{q_0}{6L}x^3$$

d) ges: $\sigma(x=L, z)$ mit $I_y = 20\,a^4$

Biegenormalspannung:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \cancel{\frac{M_z}{I_z}} y \quad (M_z = 0)$$

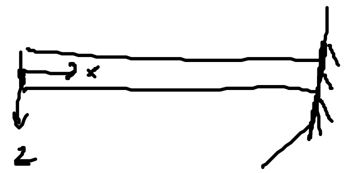
$$\sigma(x=L, z) = \frac{N(x=L)}{A} + \frac{M_y(x=L)}{I_y} z$$

$$= -\frac{\frac{27}{40} q_0 L}{A} - \frac{\frac{1}{6} q_0 L^2}{I_y} \cdot z \qquad \text{mit: } A = 27a^2, \; L = 100a$$

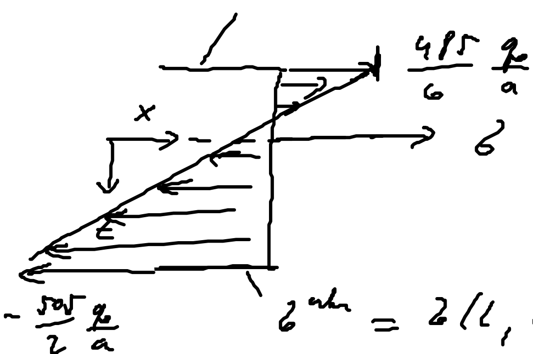
$$\sigma(L, z) = -\frac{\frac{\cancel{27}}{40} q_0 L}{\cancel{27} a^2} - \frac{\frac{1}{6} q_0 L^2}{20 a^4} \cdot z$$

$$\sigma(L, z) = -\frac{100}{40} \frac{q_0}{a} - \frac{1000}{12} \frac{q_0}{a^2} z$$

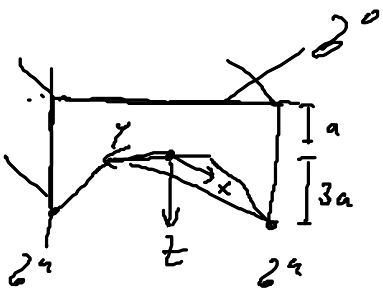
$$\sigma^{oben} = \sigma(L, z = -a)$$



betrachteter Querschnitt



$$\sigma^{unten} = \sigma(L, z = 3a)$$



$$\sigma^o = -\frac{100}{40} \frac{q_0}{a} - \frac{1000}{12} \frac{q_0}{a^2} (-a)$$

$$= -\frac{100}{40} + \frac{1000}{12} \frac{q_0}{a} = \frac{485}{6} \frac{q_0}{a} > 0$$

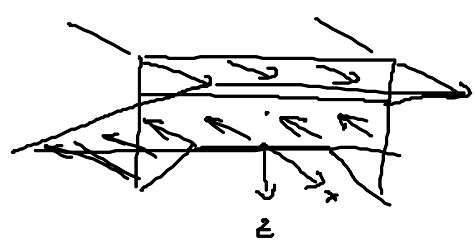
$$\sigma^u = -\frac{100}{40} \frac{q_0}{a} - \frac{1000}{12} \frac{q_0}{a^2} (3a)$$

$$= -\frac{505}{2} \frac{q_0}{a} < 0$$

Maximalwerte:

$$\sigma_{max, Zug} = \sigma^o = \frac{485}{6} \frac{q_0}{a}$$

$$\sigma_{max, Druck} = \sigma^u = -\frac{505}{2} \frac{q_0}{a}$$

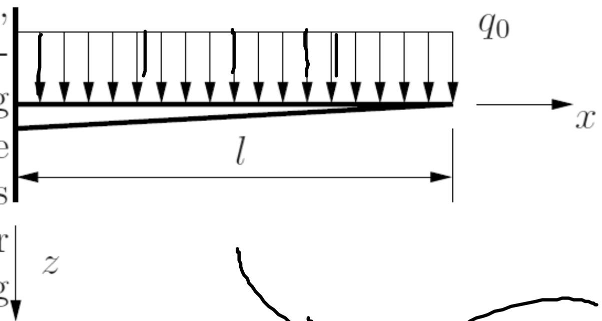


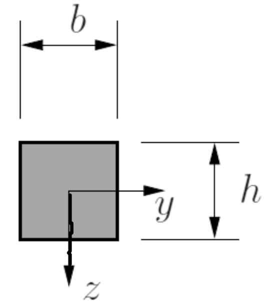
Aufgabe 128:

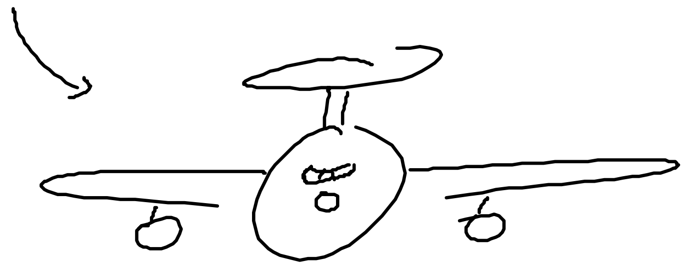
Das Modell eines Tragflügelholms besteht aus einem einseitig fest eingespannten Balken der Länge l. Der Tragflügelholm wird durch eine konstante Streckenlast q_0, die aus den Luftkräften und dem Eigengewicht resultiert, belastet. Der Balken hat eine rechteckige Querschnittsfläche $A = bh$. Die Balkenhöhe h ist eine Funktion der Längskoordinate x. Das Material sei isotrop.

(a) Bestimmen Sie den Verlauf der Balkenhöhe h, so daß der maximale Betrag der Längsspannung σ_{max} über die gesamte Länge des Balkens konstant und gleich der zulässigen Spannung σ_{zul} ist.

(b) Berechnen Sie für diesen Fall die Biegelinie $w(x)$.





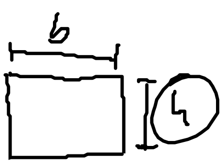


Geg.: q_0, l, E, b, σ_{zul}

a) ges: $h(x)$, so dass $\sigma_{max} = \sigma_{zul}$ über gesamten Flügel

$$\sigma = \cancel{\frac{N}{A}} + \frac{M_y}{I_y} z - \cancel{\frac{M_z}{I_z}} y$$

hier: $N = 0$, $M_z = 0$, $I_y = I_y(x)$ $\Rightarrow$ $\sigma = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z$



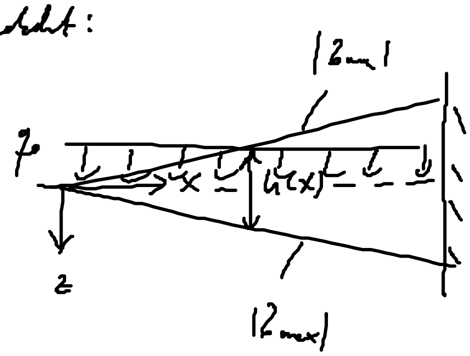
maximale Spannung bei $z = z_{max} = \frac{h(x)}{2}$

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} \frac{h(x)}{2} \quad (3)$$

Diese soll über x konstant σ_{zul} sein!

$$\sigma_{max} = \sigma_{zul} = \text{const.}$$

gedacht:



Vorgehen: $M(x)$, $I(x)$ bestimmen, $h(x)$ „ablesen"

1) $M(x)$:

<u>SL-DGL:</u>

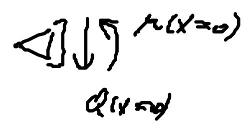
$$Q' = -q(x)$$

$$Q = -\int q_0 \, dx = -q_0 x + C_1$$

$$M' = Q$$

$$M = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$$

<u>RBen:</u> $x = 0$:



$M(0) = 0$ RB 1

$Q(0) = 0$ RB 2

RB-1:

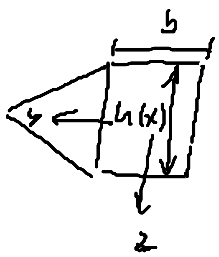
$0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

RB-2:

$0 = C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \quad M_y(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 \quad (1)$$

2) $I_y(x)$:



$$I_y = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} b \left(h(x)\right)^3 \quad (2)$$

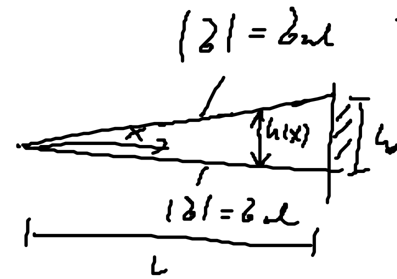
3) Einsetzen:

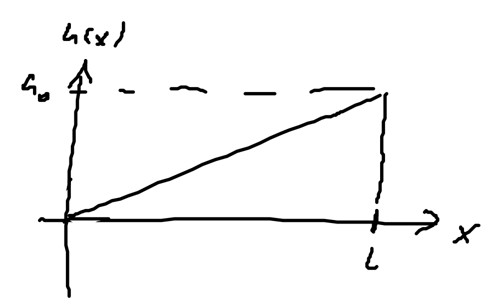
$$\sigma_{max} = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z_{max} = \frac{-\frac{1}{2} q_0 x^2}{\frac{1}{12} b \left(h(x)\right)^3} \frac{h(x)}{2} \overset{!}{=} \sigma_{zul}$$

Spannung am Rand soll über x konstant σ_{zul} sei!

$$\sigma_{zul} = \frac{6}{2}\frac{q_0}{b}x^2\frac{\cancel{h(x)}}{(h(x))^{\cancel{3}\,2}} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \sqrt{3\frac{q_0}{b}\frac{1}{\sigma_{zul}}}\,x$$

$\Rightarrow$ Form:





$$h(x) = \frac{h_0}{L}x$$

b) ges: $w(x)$

$\Rightarrow$ DGL:
$$(EI\,w''(x))'' = q(x)$$
$$EI\,w''(x) = -M(x) \quad \text{bekannt}$$
$$EI\,w''(x) = \frac{1}{2}q x^2$$
$$E\,\frac{1}{12}b\,h(x)^3\,w''(x) = \frac{1}{2}q_0 x^2$$
$$w''(x) = \frac{1}{2}q_0 x^2\frac{12}{Eb}\frac{1}{(h(x))^3} = \underbrace{\frac{6q_0}{Eb}\frac{L}{h_0}}_{A}\frac{x^2}{x^3} = A\frac{1}{x}$$
$$w'(x) = A\int\frac{1}{x}\,dx + C_1$$
$$w'(x) = A\ln(x) + C_1$$
$$w(x) = A\int\ln(x)\,dx + C_1 x + C_2$$
$$w(x) = A\,x\,(\ln(x) - 1) + C_1 x + C_2$$

RB: $w(L) = 0$, $0 = A L(\ln(L) - 1) + C_1 L + C_2 \Rightarrow C_2 = LA$

$w'(L) = 0$, $0 = A\ln(L) + C_1 \Rightarrow C_1 = -A\ln(L)$

damit:

$$w(x) = Ax(\ln(x)-1) - A\ln(L)x + LA$$

$$w(x) = -Ax + Ax(\underbrace{\ln(x) - \ln(L)}) + LA$$

$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$w(x) = A(L-x) + Ax\left(\ln\left(\frac{x}{L}\right)\right)$$

Schöner:

$$w'(x) = \int \frac{A}{L}\frac{1}{\tilde{x}} L\, d\tilde{x} + C_1 \quad \text{mit } \tilde{x} = \frac{x}{L},\ dx = L\,d\tilde{x}$$

$$w'(x) = A\ln(\tilde{x}) + C_1$$

$$w(x) = \int A\ln(\tilde{x}) L\, d\tilde{x} + C_1 x + C_2$$

$$= AL\tilde{x}(\ln(\tilde{x})-1) + C_1 x + C_2$$

Rücksub.:

$$w(x) = Ax\left(\ln\left(\frac{x}{L}\right) - 1\right) + C_1 x + C_2$$

RBen:

$$0 = AL(\underbrace{\ln\left(\frac{L}{L}\right)}_{=0} - 1) + C_1 L + C_2 \Rightarrow C_2 = AL$$

$$0 = A\underbrace{\ln\left(\frac{L}{L}\right)}_{=0} + C_1 \qquad \Rightarrow C_1 = 0$$

damit:

$$w(x) = Ax\left(\ln\left(\frac{x}{L}\right) - 1\right) + AL$$

$$w(x) = \underbrace{6\frac{q_0}{Eb}\left(\frac{L}{h_0}\right)^3}_{\text{s.o.}}\left[L + x\left(\ln\left(\frac{x}{L}\right) - 1\right)\right]$$

12. Übung

Aufgabe 2

(a)

$$\tilde{z}_s = \frac{\frac{a}{2}18a^2 + 2(a+a)\frac{9a^2}{2}}{18a^2 + 2\cdot\frac{9a^2}{2}} = \frac{27}{27}a = a$$

(b)

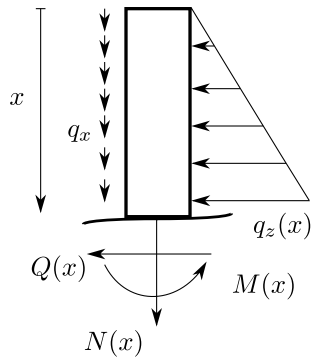
$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{a^3 18a}{12} + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 18a^2 + \dots \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{36}(3a)^3 3a + a^2\cdot\frac{9a^2}{2}\right) \\ &= \frac{3+9}{2}a^4 + 2\left(\frac{9}{4}+\frac{18}{4}\right)a^4 \\ &= \frac{39}{2}a^4 \end{aligned}$$

(c)

$$N(x) = -xq_x$$

$$Q(x) = -\frac{q_0}{2}\frac{x^2}{l}$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{6}\frac{x^3}{l}$$



(d)

$$\sigma(x,z) = \frac{M(x)}{I_{yy}}z + \frac{N}{A}$$

Maximale Druckspannung bei $x = l$, $z = +3a$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Druck,max}} = \sigma(l,+3a) &= -\frac{q_0 l^2}{120a^4}3a - \frac{27}{40}\frac{q_0 l}{27a^2} \\ &= -\frac{505}{2}\frac{q_0}{a} \end{aligned}$$

Maximale Druckspannung bei $x = l$, $z = -a$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Zug,max}} = \sigma(l,-a) &= \frac{q_0 l^2}{120a^4}a - \frac{27}{40}\frac{q_0 l}{27a^2} \\ &= \frac{485}{6}\frac{q_0}{a} \end{aligned}$$