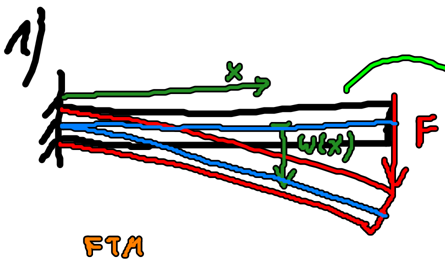
11. Übung : Biegelinien-DGL

1)



$w(x)$: Durchsenkung

FTM

$$\left(EI\,w''(x)\right)'' = q(x)$$

E-Modul

Streckenlast

EI = const:

$q_0,\ q\frac{x}{l},\ 0, \dots$

$$EI\,w^{IV} = q(x)$$

Vorgehen:

1.) Integrieren der DGL $\Rightarrow$ Konstanten C_i

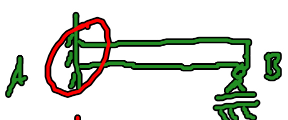
2.) RBen / ÜBen $\Rightarrow$ $w, w', M = -EIw'', Q = -EIw'''$

3.) Auflösen $\Rightarrow$ C_i aus RBen / ÜBen

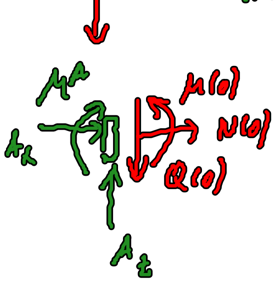
$\Rightarrow$ $w(x)$ und dazu: $M(x) = -EI\,w''(x)$

$Q(x) = -EI\,w'''(x)$

Vorteil: Man kann auch statisch überbestimmte Systeme berechnen



$w(x) \Rightarrow M(x),\ Q(x)$



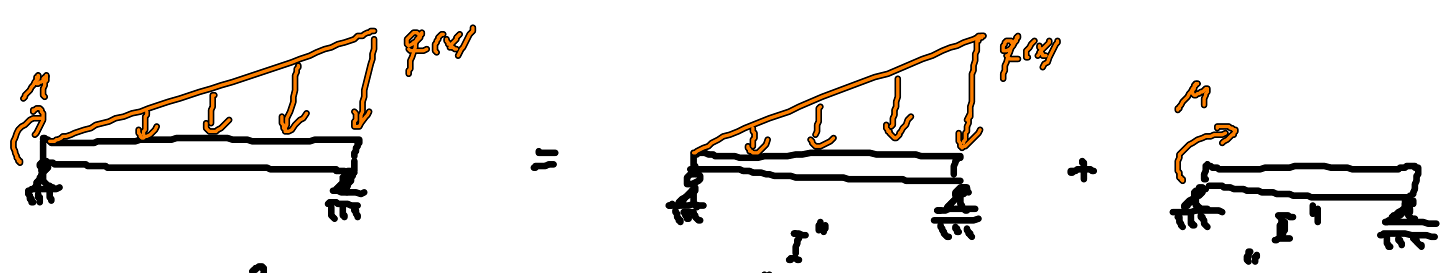
GGB:

$$A_z = Q(0) = -EI\,w'''(0)$$

$$M^A = M(0) = -EI\,w''(0)$$

2) Superpositionsprinzip

i)



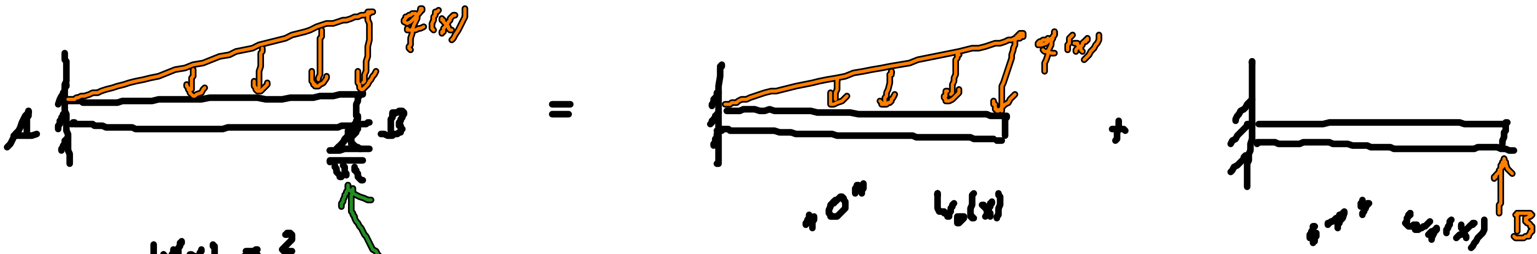
$w(x) = ?$

$w_I(x)$

$w_{II}(x)$

$$\Rightarrow\quad w(x) = w_I(x) + w_{II}(x)$$

ii)



$w(x) = ?$
$M(x) = ?$
$Q(x) = ?$

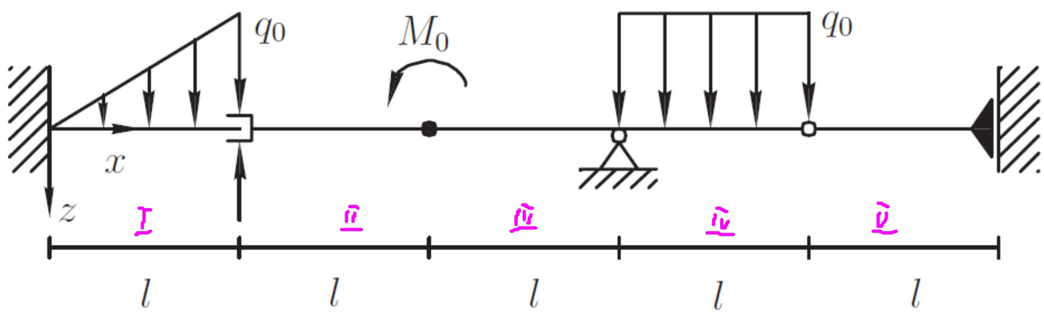
+ Verträglichkeitsbedingung : $w(x=l) = 0$
(Information: bei B gibt es kein w)

$\Rightarrow w(x) = w_0(x) + w_1(x)$

& $w(l) = 0 \Rightarrow$ Kraft B

Aufgabe 22

1. Gegeben ist der folgende Balken (EI = const.):



(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung für den Abschnitt von $x = 0$ bis $x = l$. (I) ↳ $w(x)$

(b) Geben Sie für das skizzierte System sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen zur Bestimmung der Biegelinie an.

Geg.: EI, l, q_0, M_0, F

a) $(EI\,w''(x))'' = q(x) \Rightarrow \left(EI\,w''''(x) = \frac{q_0}{l}x\right)$ für Bereich I

$EI\,w'''(x) = \frac{q_0}{2l}x^2 + c_1$

$EI\,w''(x) = \frac{q_0}{6l}x^3 + c_1 x + c_2$

$EI\,w'(x) = \frac{q_0}{24l}x^4 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

$EI\,w(x) = \frac{q_0}{120l}x^5 + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4$

$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{120l}x^5 + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4\right)$

allg. Lösung!

b) Alle nötigen RBn / ÜBn $\Rightarrow$ $4 \times \underline{V} = 20$

x	0	l	$2l$	$3l$	$4l$	$5l$
$w(x)$	0 (1)	$w_I = w_{II}$ (3)	$w_{II} = w_{III}$ (7)	$w_{III} = 0$ (11) $w_{IV} = 0$ (12)	$w_{IV} = w_V$ (15)	—
$w'(x)$	0 (2)	$w_I' = w_{II}'$ (4)	$w_{II}' = w_{III}'$ (8)	$w_{III}' = w_{IV}'$ (13)	—	0 (19)
$-EIw'' = M(x)$	—	$M_I = M_{II}$ (5)	$M_{II} = M_{III} + M_0$ (9)	$M_{III} = M_{IV}$ (14)	$M_{IV} = 0$ (16) $M_V = 0$ (17)	—
$-EIw''' = Q(x)$	—	$Q_{II} = Q_I + P$ (6)	$Q_{II} = Q_{III}$ (10)	—	$Q_{IV} = Q_V$ (18)	0 (20)

geom. RBn

dyn./phys. RBn

FI:

$M(0) = M^A = ?$

$Q(0) = F_A = ?$

$\downarrow: 0 = -Q^I + Q^{II} - P$

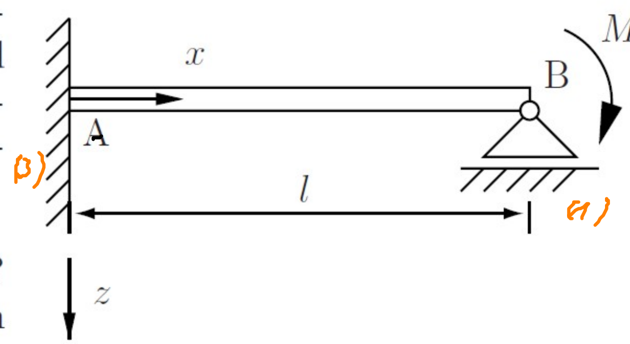
$Q^{II} = Q^I + P$

$M(5l) = M_E = ?$

$Q(5l) = 0$

Aufgabe 110

Der abgebildete schlanke Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist links fest eingespannt und rechts über ein Loslager an die Umgebung gekoppelt. Der Balken wird bei B durch ein Moment M_B belastet.



(a) Ist der Balken statisch bestimmt gelagert? Können die Schnittgrößen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen gewonnen werden?

(b) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen und den Verlauf des Biegemomentes mit Hilfe der Biegeliniendifferentialgleichung.

(c) Nutzen Sie das Superpositionsprinzip, um den Aufgabenteil (b) zu lösen.

(d) Wie groß ist das maximale Biegemoment im Balken?

Geg.: M_B, l, EI = const.

a) 1) $n = f - r - v = 3 - 4 = -1$ ↗ Nein, System statisch überbestimmt

2) Nein, das geht nicht!

b)

1) Integration:

$$(EIw'')'' = q(x)$$

$$EIw'''' = 0$$

$$EIw''' = C_1 \quad (1)$$

$$EIw'' = C_1 x + C_2 \quad (2)$$

$$EIw' = \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + \cancel{C_3} \quad (3)$$

$$EIw = \tfrac{1}{6} C_1 x^3 + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + \cancel{C_3} x + \cancel{C_4} \quad (4)$$

3.) Auflösen

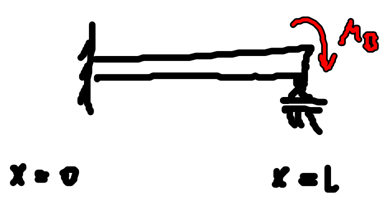
RB 1 in (4):

$$EI \cdot 0 = 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

RB 2 in (3):

$$EI \cdot 0 = 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$$

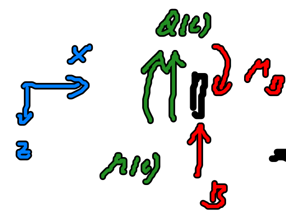
2.) RBen:



$$\text{geom.}\left\{\begin{array}{ll} w(0) = 0 & \text{RB 1} \\ w'(0) = 0 & \text{RB 2} \\ w(L) = 0 & \text{RB 3} \end{array}\right.$$

$+ \; EIw''(L) = +M_B$ RB 4 - phys.

FS bei $x = L$



$\Rightarrow M(L) = -M_B$

RB 4 in (2):

$$M_B = EIw'' = C_1 \cdot L + C_2 \Rightarrow C_2 = M_B - C_1 L$$

RB 3 in (4):

$$EI \cdot 0 = \tfrac{1}{6} C_1 L^3 + \tfrac{1}{2} C_2 L^2 \Rightarrow 0 = \frac{2\cancel{1}}{6} C_1 L^{\cancel{3}} + \frac{1}{\cancel{2}} M_B \cancel{L^2} - \frac{1}{\cancel{2}} C_1 L^{\cancel{3}}$$

$$0 = M_B - C_1 L + \tfrac{1}{3} C_1 L$$

$$C_1 = \tfrac{3}{2} \frac{M_B}{L}$$

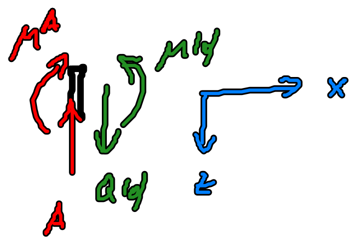
$$C_2 = -\tfrac{1}{2} M_B$$

damit ist die Biegelinie:

$$w(x) = \frac{1}{EI}\,\frac{M_B L^2}{4}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

4.) Lagerreaktionen

FS: $x = 0$:



GGW $x = 0$:

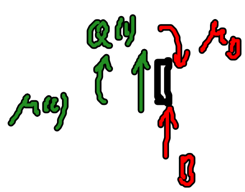
$$z: 0 = -A + Q(0) \Rightarrow A = Q(0) = -EI\,w'''(0)$$

$$A = -C_1 = -\frac{3}{2}\frac{M_B}{L}$$

$$M^0: 0 = -M^A + M(0) \Rightarrow M^A = M(0) = -EI\,w''(0) = -(C_1 \cdot 0 + C_2)$$

$$M^A = -C_2 = \frac{1}{2} M_B$$

FS: $x = L$



GGW: $x = L$:

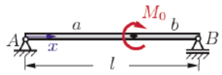
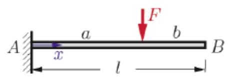
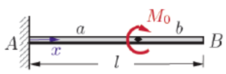
$$z: 0 = -Q(L) - B \Rightarrow B = -Q(L) = EI\,w'''(L)$$

$$B = C_1 = \frac{3}{2}\frac{M_B}{L}$$

5.) Biegemoment:

$$M(x) = -EI\,w''(x) = -(C_1 x + C_2) = -\left(\frac{3}{2}\frac{M_B}{L}x - \frac{1}{2}M_B\right)$$

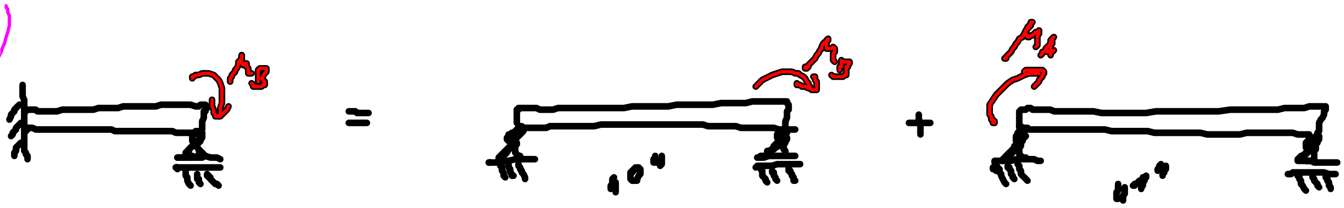
c) Nachweis mit Superposition

Nr.	Lastfall	$EI\,w'_A$	$EI\,w'_B$	$EI\,w(x)$	$EI\,w_{\max}$
5		$\frac{M_0\,l}{6}(3\beta^2-1)$ $-\frac{M_0\,l}{6}$ für $b=0$	$\frac{M_0\,l}{6}(3\alpha^2-1)$ $\frac{M_0\,l}{3}$ für $b=0$	$\frac{M_0\,l^2}{6}[\xi(3\,\beta^2-1)+\xi^3-3\langle\xi-\alpha\rangle^2]$	$\frac{\sqrt{3}\,M_0\,l^2}{27}$ für $a=0$
6		0	$\frac{F\,a^2}{2}$	$\frac{F\,l^3}{6}[3\,\xi^2\alpha-\xi^3+\langle\xi-\alpha\rangle^3]$	$\frac{F\,l^3}{3}$ für $a=l$
10		0	$M_0\,a$	$\frac{M_0\,l^2}{2}(\xi^2-\langle\xi-\alpha\rangle^2)$	$\frac{M_0\,l^2}{2}$ für $a=l$

Erklärungen: $\xi=\frac{x}{l}$; $\alpha=\frac{a}{l}$; $\beta=\frac{b}{l}$; $EI=\text{const}$; $w'=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ $\langle\xi-\alpha\rangle^n=\begin{cases}(\xi-\alpha)^n & \text{für } \xi>\alpha,\\ 0 & \text{für } \xi<\alpha.\end{cases}$

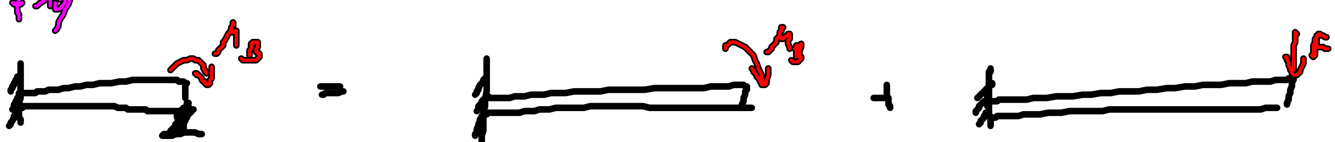
Gross et al. 2012

5)



$+ \quad w'(0)=0 \quad \Longrightarrow \quad M_A$

6) + 10)



$+ \quad w(l)=0 \quad \Longrightarrow$ F in B !

$\boxed{\text{Tut: 111, 115 ; Ha: 109, 112, 116}}$

5)

bei "0": $\overbrace{EI w_0'(0)}^{EIw_A'} = \frac{M_B l}{6}(0-1) = -\frac{1}{6} M_B l$

mit $\beta = \frac{b}{l} = 0$ $\qquad EIw_B'$ $\quad w_0'(0) = -\frac{1}{6EI} M_B l$

bei "1": $\overbrace{EI w_1'(0)} = \frac{M_A l}{6}(3-1) = \frac{1}{3} M_A l$

mit $\beta = \frac{b}{l} = 1$

$w_1'(0) = \frac{1}{3EI} M_A l$

Verträglichkeitsbedingung gibt dann M_A:

$$w'(0) = w_1'(0) + w_0'(0) = \frac{1}{3EI} M_A L - \frac{1}{6EI} M_B L \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{1}{2} M_B$$

11. Übung

Aufgabe 110

(a) Nein, das dreiwertige Lager links und das einwertige rechts ergeben zusammen vier Auflagerreaktionskomponenten, die sich nicht allein aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen lassen, das System ist statisch unbestimmt. Deshalb lassen sich auch die Schnittlasten nicht allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen:

$$3n \stackrel{?}{=} s + v \tag{1}$$
$$3 \cdot 1 \neq 4 + 0 \tag{2}$$

$\Rightarrow$ statisch unbestimmtes System

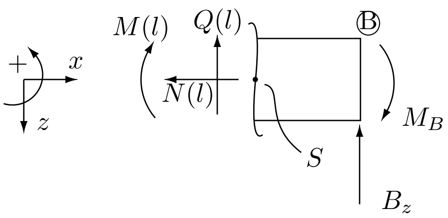
(b) Biegeliniendiff'gl.:

$$EIw''''(x) = 0 \tag{3}$$
$$EIw'''(x) = C_1 \tag{4}$$
$$EIw''(x) = C_1 x + C_2 \tag{5}$$
$$EIw'(x) = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \tag{6}$$
$$EIw(x) = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4 \tag{7}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \qquad \Rightarrow C_4 = 0 \tag{8}$$
$$w'(0) = 0 \qquad \Rightarrow C_3 = 0 \tag{9}$$
$$w(l) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{l^3}{6}C_1 + \frac{l^2}{2}C_2 = 0 \tag{10}$$

Schnitt bei B $x = l$:



$$\sum M_S = 0 = -M(l) - M_B \tag{11}$$
$$M(l) = -M_B \tag{12}$$
$$M(l) = -M_B \qquad \Rightarrow lC_1 + C_2 = M_B \tag{13}$$

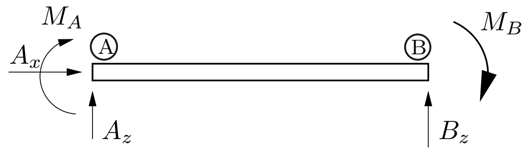
aus (10) und (13) ergibt sich:

$$C_1 = \frac{3M_B}{2l} \tag{14}$$
$$C_2 = -\frac{M_B}{2} \tag{15}$$

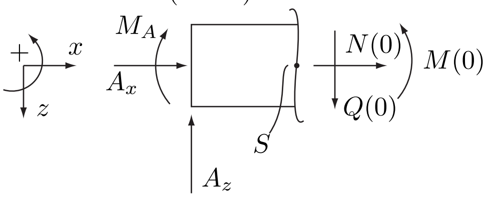
Querkraft- und Biegemomentenverlauf:

$$Q(x) = -EIw'''(x) = -\frac{3}{2}\frac{M_B}{l} \tag{16}$$
$$M(x) = -EIw''(x) = \frac{3}{2}M_B\left[\frac{1}{3} - \frac{x}{l}\right] \tag{17}$$

Auflagerreaktion (gemäß folgender Freischnittsskizze):



Schnitt bei A $(x = 0)$:

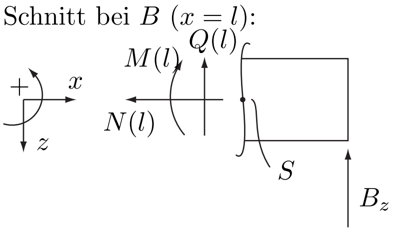


$$\sum M_S = 0 = -M_A + M(x=0) \tag{18}$$
$$\Rightarrow \quad M_A = M(0) = \frac{1}{2}M_B \tag{19}$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q(x=0) \tag{20}$$
$$\Rightarrow \quad A_z = Q(0) = \frac{-3}{2}\frac{M_B}{l} \tag{21}$$

$$\sum F_x = 0 = N(x=0) + A_x = 0 \tag{22}$$
$$N(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0 \tag{23}$$

Schnitt bei B $(x = l)$:

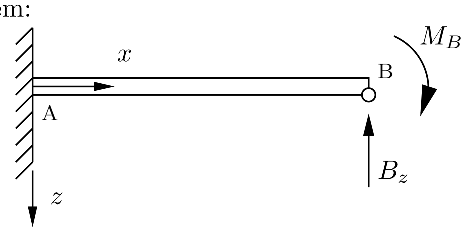


$$\sum F_z = 0 = -B_z - Q(l) = 0 \tag{24}$$
$$\Rightarrow \quad B_z = -Q(l) = \frac{3}{2}\frac{M_B}{l} \tag{25}$$

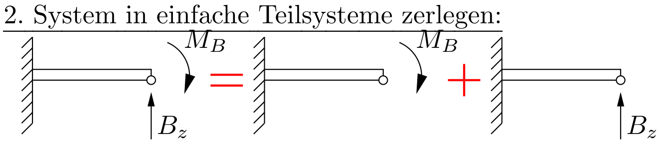
(c) 1. Statisch bestimmtes Ersatzsystem:

Ersetze eine Fesselung durch ihre unbekannte Reaktionslast. Diese wird nun im folgenden als äußere Last behandelt (als wenn sie bekannt wäre).

Zum Beispiel wird das rechte Loslager durch die Kraft B_z ersetzt und wir erhalten folgendes statisch bestimmte Ersatzsystem:



2. System in einfache Teilsysteme zerlegen:



Superpositionsprinzip: Die Gesamtverformung ergibt sich aus der Summe der Verformung der Teilsysteme:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \tag{26}$$

3. Lösungen der einfachen Teilsysteme, z.B. aus Tabellen:

$$w_1(l) = \frac{1}{2}\frac{M_B l^2}{EI} \tag{27}$$

$$w_2(l) = -\frac{1}{3}\frac{B_z l^3}{EI} \tag{28}$$

4. Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Zwangsbedingung)

$$w(l) = 0 \tag{29}$$

Die Auswertung der Zwangsbedingung liefert uns die unbekannte Reaktionskraft B_z:

$$w_1(l) + w_2(l) = 0 \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}\frac{M_B l^2}{EI} - \frac{1}{3}\frac{B_z l^3}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z = \frac{3}{2}\frac{M_B}{l} \tag{31}$$

5. Auswertung Biegemomentenverlauf aus Superposition der Biegemomente der Teilsysteme:

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) \tag{32}$$

M_1 und M_2 z.B. aus Tabelle oder Globalschnitt und Gleichgewichtsbeziehungen:

$$M_1(x) = -M_B \tag{33}$$

$$M_2(x) = B_z(l-x) = \frac{3}{2}M_B\left[1 - \frac{x}{l}\right] \tag{34}$$

$$\Rightarrow \ M(x) = M_B\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{x}{l}\right] \tag{35}$$

Lagerreaktionen (die restlichen außer B_z) z.B. aus Gleichgewichtsbeziehungen:

$$M_A = \frac{M_B}{2} \tag{36}$$

$$A_z = -\frac{3}{2}\frac{M_B}{l} \tag{37}$$

(d) Da $M(x)$ linear verläuft, siehe Gl. (17), muß das Maximum von $|M(x)|$ an einem Ende auftreten:

$$\max|M(x)| = \max\left\{\frac{1}{2}M_B,\ |-M_B|\right\} = M_B \tag{38}$$