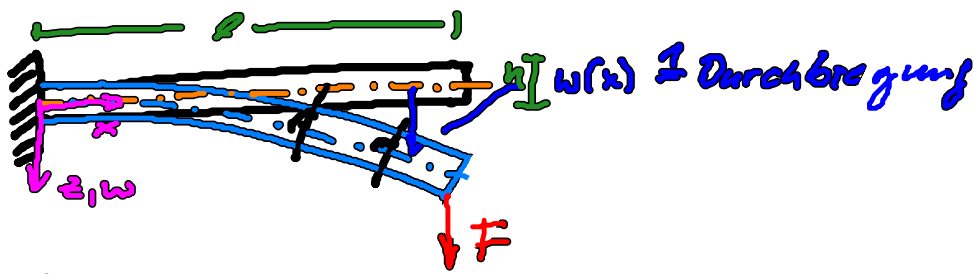


10. Übung: "Balckenbiegung"



Annahmen:

- schlanker Balken $l \gg b, h$ (ca. $\frac{1}{10}$)
- Bernoulli Hypothese: Querschnitte stehen senkrecht zur neutralen Faser (\rightarrow sp. Querschnitts) und bleiben eben

Es gilt:

$$\boxed{-EI_y w''(x) = M_y(x)} \quad \text{- Biegemoment}$$

\downarrow
 E -Modul $\underbrace{\text{Flächenträgheitsmoment}}_{\text{Biegesteifigkeit}}$

Bsp.



$$\Rightarrow M(x) = -F(l-x)$$

$$+EI_y w''(x) = +F(l-x) \quad | \int dx$$

$$EI_y w'(x) = F(lx - \frac{x^2}{2}) + c_1 \quad | \int dx$$

$$EI_y w(x) = F(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}lx^2) + \underline{c_1 x} + \underline{c_2}$$

hier:

$$w(x=0) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$w'(x=0) = 0$$

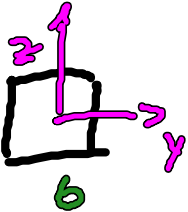
$$w(x) = \frac{1}{EI} F \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}lx^2 \right)$$


	w	w'
	0	-
	0	0
	-	0
	-	-

Flächenträgheitsmomente:

$$I_y = \int z^2 dA - \text{Biegung um die } y\text{-Achse}$$

$$I_z = \int y^2 dA - \text{Biegung um die } z\text{-Achse}$$

3p
1)  $I_y = \frac{h^3 \cdot b}{12}$
 $I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}$

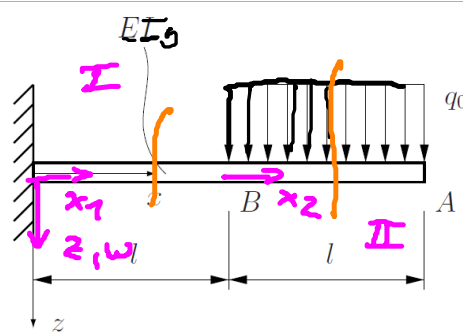
2)  $I_y = I_z = \frac{\pi}{4} r^4$

106)

Der abgebildete schlanke Balken (Biegesteifigkeit EI) ist links fest eingespannt und wird im Abschnitt BA durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Bestimmen Sie die Absenkung des Punktes A.

Geg.: q_0, l, EI

$w(x) \rightarrow \hat{w}_A$



$$-EI_y w''(x) = M_y(x)$$

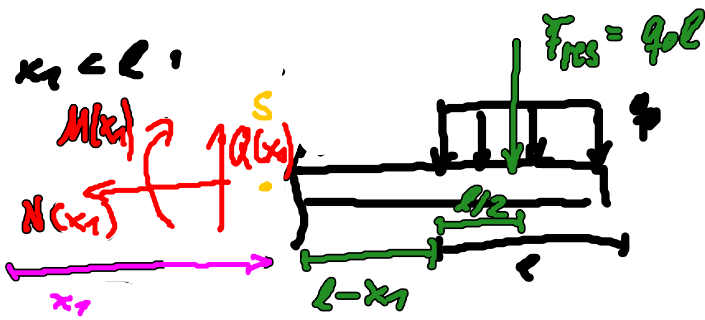
1) Bereichserklärung und M_y berechnen:

I: $0 \leq x_1 \leq l$

II: $l \leq x_2 \leq 2l$

M_0):

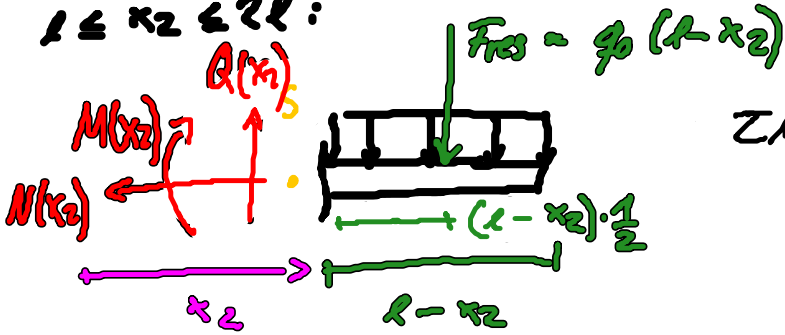
$0 < x_1 < l$:



$$\sum M^{(A)} = 0 = -M(x_1) - q_0 l \left(\frac{l}{2} + (l-x_1) \right)$$

$$\Rightarrow M(x_1) = -q_0 l \left(\frac{3}{2} l - x_1 \right)$$

$l \leq x_2 \leq 2l$:



$$\sum M^{(S)} = 0 = -M(x_2) - q_0 (l-x_2) \cdot \frac{(l-x_2)}{2}$$

$$\Rightarrow M(x_2) = -\frac{1}{2} q_0 (l-x_2)^2$$

In die Dgl. einsetzen u. ausrechnen!

I: $0 \leq x_1 \leq l$

$$+EI_y w''(x_1) = +q_0 l \left(\frac{3}{2} l - x_1 \right) \quad | \int dx_1$$

$$EI_y w'(x_1) = q_0 l \left(\frac{3}{2} l x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) + C_1$$

$$= q_0 l \left(-\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} l x_1 \right) + C_1 \quad | \int dx_1$$

$$\rightarrow EI_y w(x_1) = q_0 l \left(-\frac{1}{6} x_1^3 + \frac{3}{4} l x_1^2 \right) + \underbrace{q_1}_{=0} x_1 + \underbrace{C_2}_{=0}$$

II: $l \leq x_2 \leq 2l$:

$$-EI_y w''(x_2) = +\frac{1}{2} q_0 (l-x_2)^2 = +\frac{1}{2} q_0 (l^2 - 2lx_2 + x_2^2) \quad | \int dx_2$$

$$\rightarrow EI_y w'(x_2) = \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{1}{3} x_2^3 - x_2^2 l + x_2 l^2 \right) + C_3 \quad | \int dx_2$$

$$EI_y w(x_2) = \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{1}{12} x_2^4 - \frac{1}{3} x_2^3 l + \frac{1}{2} x_2^2 l^2 \right) + C_3 \cdot x_2 + C_4$$

4 Konstante \Rightarrow 4 Randbed. o. üB.

3. Konstanten bestimmen:

$w(x)$ und $w'(x)$ an bestimmten Stellen:

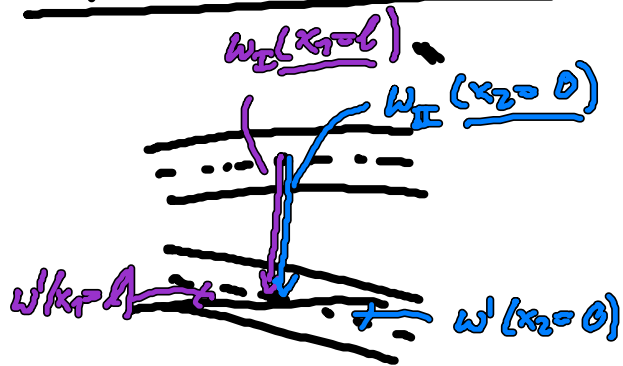
$$0 < x_1 < l$$

$$w(x_1=0) = 0 \quad \text{RB-1}$$

$$w'(x_1=0) = 0 \quad \text{RB-2}$$

→ feste Einspannung

$$x_1 = l \text{ und } x_2 = 0$$



$$w(x_1=l) = w(x_2=0)$$

$$w'(x_1=l) = w'(x_2=0)$$

Üb -1

Üb -2

$$\text{RB-1: } w(x_1=0) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{RB-2: } w'(x_1=0) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\text{Üb-2: } -q_0 l \left(\frac{1}{2} l^2 - \frac{3}{2} l \right) = c_3 \Rightarrow \boxed{c_3 = q_0 l^3}$$

$$\text{Üb-1: } -q_0 l \left(\frac{1}{6} l^3 - \frac{3}{4} l^3 \right) = c_4 \Rightarrow \boxed{c_4 = \frac{7}{12} q_0 l^4}$$

$$w(x_1) = \frac{q_0 l}{EI_0} \left(\frac{1}{6} x_1^3 - \frac{3}{4} x_1^2 l \right)$$

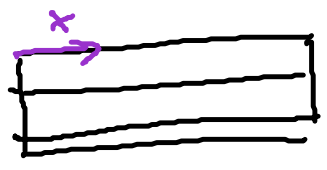
$$w(x_2) = \frac{1}{EI_0} \left(\frac{1}{2} q_0 \left[\frac{1}{12} x_2^4 - \frac{1}{3} l x_2^3 + \frac{1}{2} l^2 x_2^2 \right] + q_0 l^3 x_2 + \frac{7}{12} q_0 l^4 \right)$$

$$\hat{w}_A = w(x_2=l) = \frac{41}{24} \frac{q_0 l^4}{EI_0} //$$

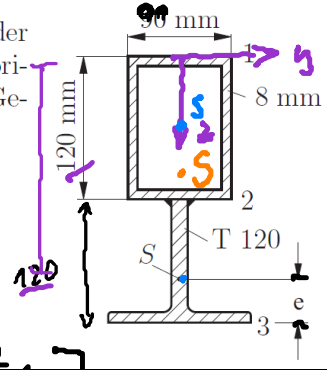
1
Durchbiegung bei A

21

Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment der beiden Balkenquerschnitte bezüglich der horizontalen Achse durch den Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts.



I_y



Profil T 120:
 $I_0 = 366 \text{ cm}^4$
 Fläche:
 $A = 29,6 \text{ cm}^2$
 $e = 3,28 \text{ cm}$

$= 366 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
 $= 32,8 \text{ mm}$

$$I_{y, \text{Ges}} = \sum_{i=1}^n \left[I_y^i + \bar{z}_i^2 A_i \right]$$

Flächenträgheitsmoment Teilkörper bzgl. seines SP. Stabes Anteil

1) $z_S^{\text{ges}} \Rightarrow z_S^i = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$ bzgl. oberen Kante

	\bar{z}	$z_i [\text{mm}]$	$A_i [\text{mm}^2]$	$z_i A_i [\text{mm}^3]$
1	120	207,2	2960	619,32 · 10 ³
2	120	60	3104	186,24 · 10 ³

$z_1 = (120 + 120 - e) \text{ mm} = 207,2 \text{ mm}$
 $A_1 = 29,6 \text{ cm}^2 = 2960 \text{ mm}^2$

$A_2 = [(120 \cdot 90) - (74 \cdot 90)] \text{ mm}^2 = 3104 \text{ mm}^2$

$\Rightarrow z_S = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i} = 137,9 \text{ mm}$

2) Gesamt Flächenträgheitsmoment

$$I_y^{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n (I_y^i + \bar{z}_i^2 A_i)$$

	z [mm]	I_y^z [mm ⁴]
1	75,3	$366 \cdot 10^4$
2	71,9	$6,023 \cdot 10^6$

$$|z_1| = (207,2 - 131,9) \text{ mm} = 75,3 \text{ mm}$$

$$|z_2| = (60 - 131,9) \text{ mm} = 71,9 \text{ mm}$$

$$I_y^z = \left(\frac{1}{12} (30 \cdot 120^3) - (72 \cdot 104^3) \right) \text{ mm}^4 = 6,023 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y^0 = I_y^z + z_1^2 A_1 + I_y^z + z_2^2 A_2 = 45,57 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$= 45,57 \cdot 10^2 \text{ cm}^4$$