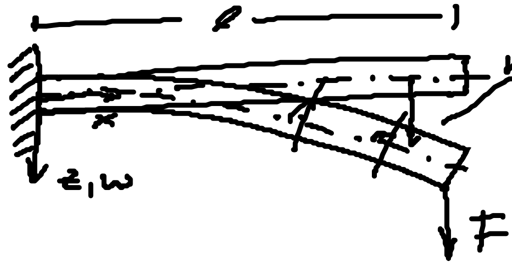
10. Übung: „Balkenbiegung"



$w(x) \hat{=}$ Durchbiegung

Annahmen:

- schlanker Balken $l \gg b, h$ (ca. $\frac{1}{10}$)
- Bernoulli Hypothese: Querschnitte stehen senkrecht zur neutralen Faser (→ SP. Querschnitts) und bleiben eben

Es gilt:

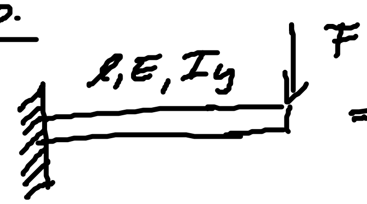
$$\boxed{-\underbrace{E I_y}_{\text{Biegesteifigkeit}} w''(x) = M_y(x)}$$

- Biegemoment

E-Modul Flächenträgheitsmoment

Biegesteifigkeit

Bsp.



$$\Rightarrow M(x) = -F(l-x)$$

$$+EI_y w''(x) = +F(l-x) \qquad \Big| \int dx$$

$$EI_y w'(x) = F\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1 \qquad \Big| \int dx$$

$$EI_y w(x) = F\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}lx^2\right) + \underline{c_1}x + \underline{c_2}$$

	w	w'
	0	—
	0	0
	—	0
	—	—

hier:

$$w(x=0) = 0$$
$$w'(x=0) = 0 \qquad \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} F\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}lx^2\right) \;//$$

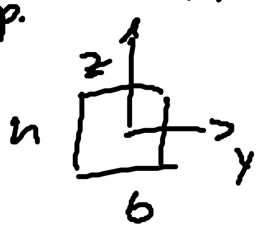
Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \int_{(A)} z^2 \, dA \quad - \text{ Biegung um die Y-Achse}$$

$$I_z = \int_{(A)} y^2 \, dA \quad - \text{ Biegung um die Z-Achse}$$

Bsp.

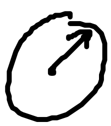
1)



$$I_y = \frac{h^3 \cdot b}{12}$$

$$I_z = \frac{b^3 h}{12}$$

2)

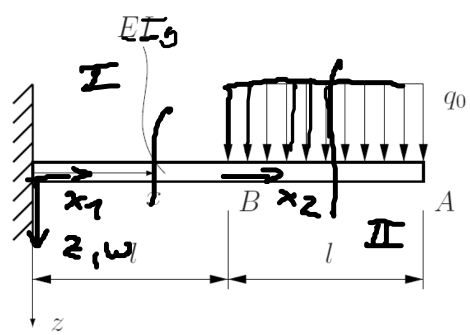


$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4} r^4$$

106) Der abgebildete schlanke Balken (Biegesteifigkeit EI) ist links fest eingespannt und wird im Abschnitt BA durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Bestimmen Sie die Absenkung des Punktes A.

Geg.: q_0, l, EI

$w(x) \rightarrow \hat{w}_A$



$$-EI_y w''(x) = M_y(x)$$

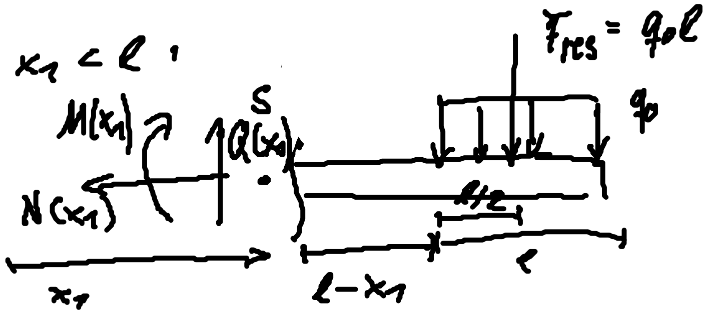
1) Bereichseinteilung und M_y berechnen:

I: $0 \leq x_1 < l$

II: $l < x_2 \leq 2l$

$M_y)$:

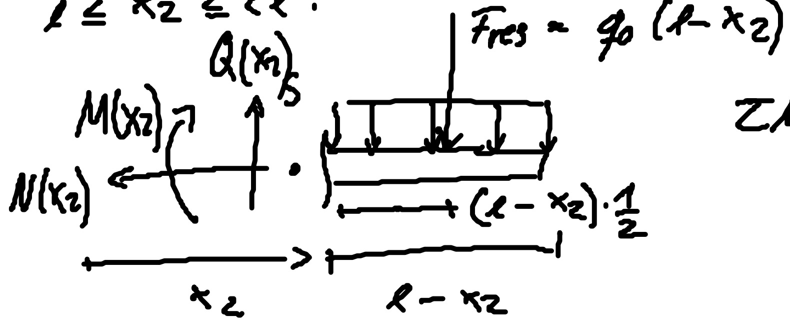
$0 \le x_1 < \ell$:



$$\Sigma M^{(S)} = 0 = -M(x_1) - q_0 \ell \left(\frac{\ell}{2} + (\ell - x_1)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x_1) = -q_0 \ell \left(\frac{3}{2}\ell - x_1\right)}$$

$\ell \le x_2 \le 2\ell$:



$$\Sigma M^{(S)} = 0 = -M(x_2) - q_0 (\ell - x_2) \cdot \frac{(\ell - x_2)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x_2) = -\frac{1}{2} q_0 (\ell - x_2)^2}$$

In die Dgl. einsetzen u. ausrechnen:

I: $0 \le x_1 < \ell$

$$+EI_y w''(x_1) = +q_0 \ell \left(\frac{3}{2}\ell - x_1\right) \qquad \Big| \int dx_1$$

$$EI_y w'(x_1) = q_0 \ell \left(\frac{3}{2}\ell x_1 - \frac{1}{2}x_1^2\right) + c_1$$

$$= q_0 \ell \left(-\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}\ell x_1\right) + c_1 \qquad \Big| \int dx_1$$

$$\rightarrow \quad EI_y w(x_1) = q_0 \ell \left(-\frac{1}{6}x_1^3 + \frac{3}{4}\ell x_1^2\right) + \underbrace{c_1}_{=0} x_1 + \underbrace{c_2}_{=0}$$

II: $\ell \le x_2 \le 2\ell$:

$$+EI_y w''(x_2) = +\frac{1}{2} q_0 (\ell - x_2)^2 = +\frac{1}{2} q_0 (\ell^2 - 2\ell x_2 + x_2^2) \qquad \Big| \int dx_2$$

$$\rightarrow \quad EI_y w'(x_2) = \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{1}{3}x_2^3 - x_2^2 \ell + x_2 \ell^2\right) + c_3 \qquad \Big| \int dx_2$$

$$EI_y w(x_2) = \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{1}{12}x_2^4 - \frac{1}{3}x_2^3 \ell + \frac{1}{2}x_2^2 \ell^2\right) + c_3 \cdot x_2 + c_4$$

4 Konstante $\Rightarrow$ 4 Randbed. o. ÜS.

3. Konstanten bestimmen:

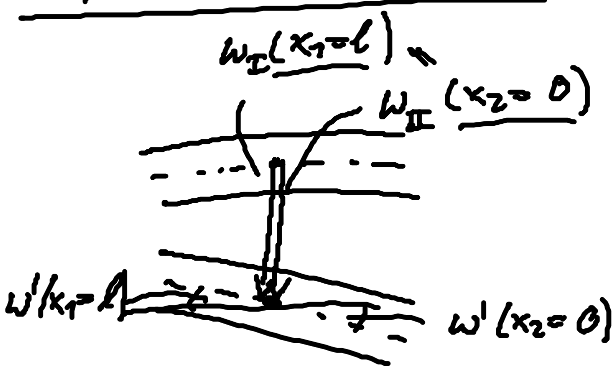
$w(x)$ und $w'(x)$ an bestimmten Stellen:

$0 \leq x_1 < l$:

$$w(x_1=0) = 0 \qquad RB-1$$
$$w'(x_1=0) = 0 \qquad RB-2$$

$\rightarrow$ feste Einspannung

$x_1 = l$ und $x_2 = 0$



$$w(x_1=l) = w(x_2=0) \qquad \ddot{U}B-1$$
$$w'(x_1=l) = w'(x_2=0) \qquad \ddot{U}B-2$$

$$RB-1: \quad w(x_1=0) \Rightarrow c_2 = 0$$
$$RB-2: \quad w'(x_1=0) \Rightarrow c_1 = 0$$
$$\ddot{U}B-2: \quad -q_0 l\underbrace{\left(\frac{1}{2}l^2 - \frac{3}{2}l^2\right)}_{-l^2} = c_3 \Rightarrow \boxed{c_3 = q_0 l^3}$$

$$\ddot{U}B-1: \quad -q_0 l\underbrace{\left(\frac{1}{6}l^3 - \frac{3}{4}l^3\right)}_{-\frac{7}{12}l^3} = c_4 \Rightarrow \boxed{c_4 = \frac{7}{12}q_0 l^4}$$

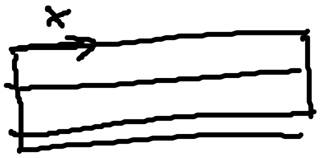
$$w(x_1) = \frac{q_0 l}{EI_y}\left(\frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{4}x_1^2 l\right) //$$
$$w(x_2) = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{1}{2}q_0\left[\frac{1}{12}x_2^4 - \frac{1}{3}l x_2^3 + \frac{1}{2}l^2 x_2^2\right] + q_0 l^3 x_2 + \frac{7}{12}q_0 l^4\right) //$$

$$\hat{w}_A = w(x_2 = l) = \frac{41}{24}\frac{q_0 l^4}{EI_y} //$$

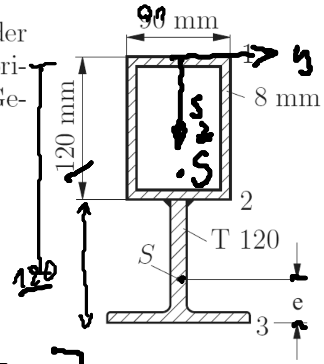
$\uparrow$

Durchbiegung bei A

21 Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment der beiden Balkenquerschnitte bezüglich der horizontalen Achse durch den Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts.



I_y



Profil T 120:
$I_0 = 366\ \text{cm}^4 = 366 \cdot 10^4\ \text{mm}^4$

Fläche:
$A = 29,6\ \text{cm}^2$
$e = 3,28\ \text{cm} \approx 32,8\ \text{mm}$

$$I_{y,ges} = \sum_{i=1}^{n} \left[I_y^i + \underbrace{\bar{z}_i^2 A_i}_{\text{Steiner Anteil}} \right]$$

Flächenträgheitsmoment Teilkörper bzgl. seines SP.

1) $z_S^{ges} = ?$ $\quad z_S^{ges} = \dfrac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$ bzgl. oberen Kante

i	z_i [mm]	A_i [mm²]	$z_i A_i$ [mm³]
1	207,2	2960	$613,32 \cdot 10^3$
2	60	3104	$186,24 \cdot 10^3$

$z_1 = (120 + 120 - e)\ \text{mm} = 207,2\ \text{mm}$
$A_1 = 29,6\ \text{cm}^2 = 2960\ \text{mm}^2$
$A_2 = [(120 \cdot 90) - (74 \cdot 104)]\ \text{mm}^2 = 3104\ \text{mm}^2$

$$\Rightarrow z_S = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i} = 131,9\ \text{mm}$$

2) Gesamt Flächenträgheitsmoment

$$I_y^{ges} = \sum_{i=1}^{2} \left(I_y^i + \bar{z}_i^2 A_i \right)$$

i	$\bar{z}_i = \lvert(z_s - z_i)\rvert$ [mm]	I_y^i [mm^4]
1	75,3	$366 \cdot 10^4$
2	71,9	$6{,}023 \cdot 10^6$

$$|\bar{z}_1| = (207{,}2 - 131{,}9)\ mm = 75{,}3\ mm$$

$$|\bar{z}_2| = (60 - 131{,}9)\ mm = 71{,}9\ mm$$

$$I_y^2 = \left(\frac{1}{12}\left(90 \cdot 120^3\right) - \left(74 \cdot 104^3\right)\right) mm^4 = 6{,}023 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$I_y^{ges} = I_y^1 + \bar{z}_1^2 A_1 + I_y^2 + \bar{z}_2^2 A_2 = 45{,}51 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$= 45{,}51 \cdot 10^2\ cm^4$$