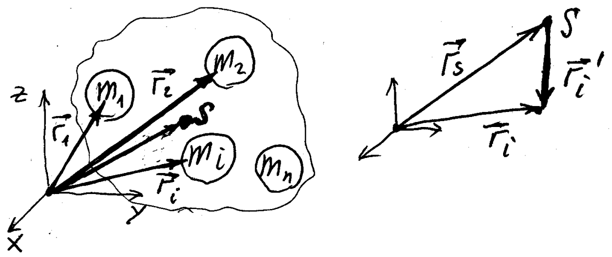
**Schwerpunkt (Fortsetzung). Statische Bestimmtheit.**

**Literatur:** ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 4.1-4.4; 5.1.1, 5.1.2**

## I. Schwerpunkt einer Gruppe von Massen



Gegeben sei ein System von kleinen, aber massiven Körpern, die alle starr miteinander verbunden sind. Auf den i-ten Körper wirkt die Schwerekraft $m_i\vec{g}$, wobei $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung ist. Zu finden ist der Angriffspunkt der Resultierenden aller Kräfte (Schwerpunkt).

*Lösung:* Die Aufgabe kann umformuliert werden: Es ist der Punkt (S) zu finden, für den der Momentenvektor aller Kraftmomente bezüglich S Null ist. Die Lage des Punktes S ist durch die Gleichung

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

gegeben.

*Beweis:* Es ist zu beweisen, dass das Gesamtkraftmoment bezüglich des oben angegebenen Punktes Null ist.

$$\vec{M}_S = \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{g} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_S\right) \times \vec{g}$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \sum_i m_i \vec{r}_S \times \vec{g} =$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \left(\vec{r}_S \times \vec{g}\right) \sum_i m_i =$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \frac{\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}}{\sum m_i} \sum_i m_i \equiv 0$$

In Koordinaten:

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}}, \quad \boxed{y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}}, \quad \boxed{z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}}.$$

## II. Schwerpunkt eines kontinuierlichen Körpers

Bei einem kontinuierlichen Körper werden Summen durch Integrale ersetzt:

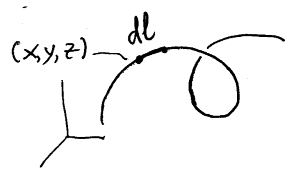
$$x_s = \frac{\int x\,dm}{\int dm}, \quad y_s = \frac{\int y\,dm}{\int dm}, \quad z_s = \frac{\int z\,dm}{\int dm}.$$

Das Differential der Masse kann als $dm = \rho dV$ geschrieben werden. Somit nehmen die obigen Gleichungen die folgende Form an:

$$x_s = \frac{\int x\,dV}{\int dV}, \quad y_s = \frac{\int y\,dV}{\int dV}, \quad z_s = \frac{\int z\,dV}{\int dV}.$$

Für eine homogene Scheibe mit der Flächendichte $\sigma$ schreibt sich $dm = \sigma dA$ und die Koordinaten des Schwerpunkts nehmen die Form

$$x_s = \frac{\int x\,dA}{\int dA}, \quad y_s = \frac{\int y\,dA}{\int dA}, \quad z_s = \frac{\int z\,dA}{\int dA} \text{ an.}$$




Für eine Linie mit der Liniendichte $\lambda$ gilt

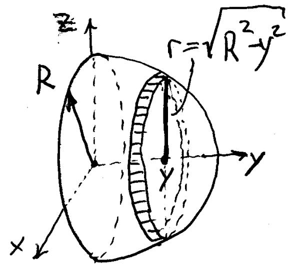
$$dm = \lambda dl$$

und

$$x_s = \frac{\int x\,dl}{\int dl}, \quad y_s = \frac{\int y\,dl}{\int dl}, \quad z_s = \frac{\int z\,dl}{\int dl}.$$

## III. Beispiele

**B1.** Zu bestimmen ist die Lage des Schwerpunkts einer homogenen Halbkugel.



*Lösung:* Der Schwerpunkt liegt auf der *y*-Achse. Es ist deshalb nur die *y*-Koordinate zu bestimmen:

$$y_s = \frac{\int y\,dV}{\int dV}.$$

Wir schneiden die Halbkugel in dünne Scheiben parallel zur (*x*, *z*)-Ebene. Das Volumendifferential ist gleich

$$dV = \pi r^2 dy = \pi\left(R^2 - y^2\right)dy .$$

Die y-Koordinate des Schwerpunkts ist somit

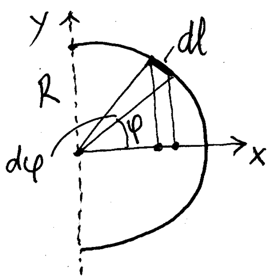
$$y_s = \frac{\int_0^R y\pi\left(R^2 - y^2\right)dy}{\int_0^R \pi\left(R^2 - y^2\right)dy} = \frac{\int_0^R y\pi R^2 dy - \int_0^R y\pi y^2 dy}{\int_0^R \pi R^2 dy - \int_0^R \pi y^2 dy} =$$

$$= \frac{\pi\left(R^2 \int_0^R y\,dy - \int_0^R y y^2 dy\right)}{\pi\left(R^2 \int_0^R dy - \int_0^R y^2 dy\right)} = \frac{\pi\left(R^2 R^2/2 - R^4/4\right)}{\pi\left(R^2 R - R^3/3\right)} =$$

$$y_s = \frac{\pi R^4/4}{2\pi R^3/3} = \frac{3}{8}R.$$

(Nenner: Volumen einer Halbkugel)

**B2.** Zu finden ist die Lage des Schwerpunkts eines Kreisbogens.




*Lösung:*

$$x_s = \frac{\int x dl}{\int dl} = \frac{\int x dl}{\pi R}$$

Wenn wir zur Charakterisierung des laufenden Punktes am Kreisbogen den Winkel $\varphi$ benutzen, so gilt:

$x = R\cos\varphi,\ dl = Rd\varphi,\ \varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$. Somit: ist

$$x_s = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos\varphi d\varphi}{\pi R} = \frac{R^2\left[\sin\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\pi R} = \frac{2}{\pi}R.$$

**IV. Statische Bestimmtheit**

Definitionen:

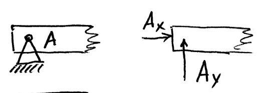
**A)** Die Zahl der *Freiheitsgrade f* ist die Zahl der unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers (bzw. eines Körpersystems). Z.B. gilt für einen Punkt im Raum $f = 3$ und für einen starren Körper im Raum $f = 6$. Dasselbe gilt für die Ebene entsprechend mit 2 und 3.

*Bemerkung:* Die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ist immer gleich der Zahl der Freiheitsgrade.

**B)** Lager und Verbindungselemente sind *Bindungen*, die bestimmte Bewegungsarten verhindern.

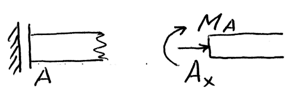
**C)** Die Anzahl der Freiheitsgrade, die eine Bindung einschränkt, heißt *Wertigkeit* der Bindung (des Lagers).

*Bemerkung:* Die Zahl der unbekannten Lagerreaktionen *r* ist immer gleich der Wertigkeit der Lager.

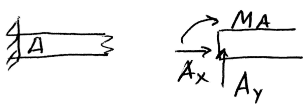



zweiwertig

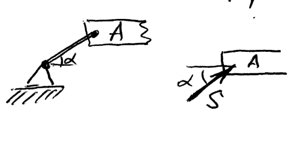

einwertig




zweiwertig




dreiwertig



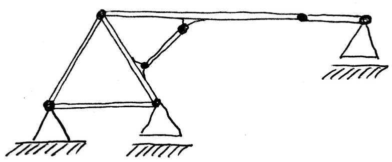

einwertig

**D)** Ein Tragwerk ist *statisch bestimmt*, wenn alle Lagerreaktionen eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sind.

**E)** Eine *notwendige Bedingung* für die statische Bestimmtheit ist, dass die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten ist, oder:

*Bei einem statisch bestimmten System ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Summe der Wertigkeiten aller Lager und Verbindungselemente.*

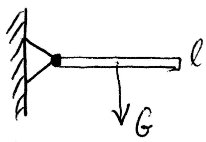
**B1.** Ist dieses Stabwerk statisch bestimmt?



(Antwort in der Vorlesung)

**F)** Ist die Zahl der Freiheitsgrade größer als die Wertigkeit der Lager (die Zahl der Gleichungen größer als die Zahl der Unbekannten) $\Rightarrow$ Gleichgewichtsgleichungen können nicht erfüllt werden - *kinematische Unbestimmtheit.*

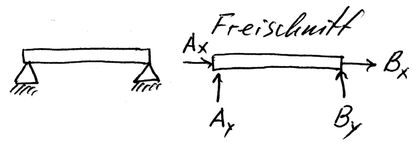
**B2.**




Momentengleichung $Gl/2 = 0$ kann nicht erfüllt werden: Es gibt kein statisches Gleichgewicht.

**G)** Ist Die Zahl der Freiheitsgrade kleiner als die Wertigkeit $\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Gleichgewichtslösungen - *statische Unbestimmtheit.*

**B3.**



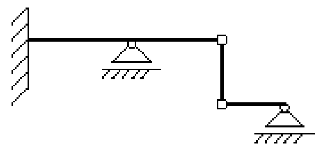

Gleichgewichtsgleichungen:

$A_x + B_x = 0,\quad A_y + B_y = 0,\quad B_y l = 0.$

Daraus folgt: $B_y = 0,\ A_y = 0,\ A_x = -B_x$. Die letzteren zwei Kräfte sind nicht eindeutig bestimmbar $\Rightarrow$ System ist statisch unbestimmt.

**B4.** Ist die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit bei dem abgebildeten System erfüllt?

Geben Sie die von Ihnen benutzte Formel an!



Benennen Sie die auftretenden Größen!

Ist dieses System statisch bestimmt?