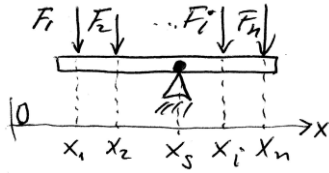


### I. Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte

(A) Auf einen Stab greifen  $N$  parallele Kräfte an. Wo muß man den Balken unterstützen, damit er im Gleichgewicht bleibt? (Dieser Punkt heißt der



Schwerpunkt des Kraftsystems).

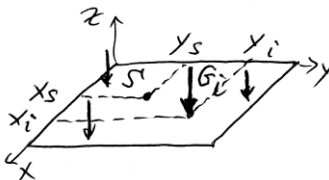
**Lösung:** Das Kraftmoment bezüglich des Punktes  $S$  muß verschwinden:

$$(x_1 - x_s)F_1 + \dots + (x_i - x_s)F_i + \dots = \sum (x_i - x_s)F_i = 0$$

oder  $\sum x_i F_i - x_s \sum F_i = 0$ . Daraus folgt

$$x_s = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}$$

(B) Dasselbe gilt für ein System von Kräften, die an einer Platte angreifen.



**Lösung:** Momentengleichgewicht bezüglich des Schwerpunkts  $S$ :

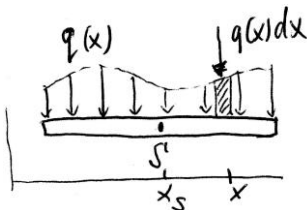
um die  $x$ -Achse:  $\sum (y_i - y_s)G_i = 0$ ,

um die  $y$ -Achse:  $\sum (x_i - x_s)G_i = 0$ .

Daraus folgt:  $x_s = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}$ ,  $y_s = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}$ .

### II. Kontinuierlich verteilte Kräfte

Eine auf einer *Linie* kontinuierlich verteilte

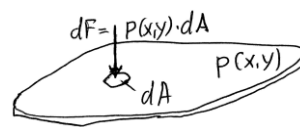


Kraft wird durch die *Streckenlast*  $q(x)$  charakterisiert. Die auf ein infinitesimal kleines Längenelement  $dl$

wirkende Kraft ist gleich  $dF = q(x)dx$ . Bei kontinuierlich verteilten Kräften werden in der Schwerpunktdefinition die Summen durch Integrale ersetzt:

$$x_s = \frac{\sum x_i q(x_i) \Delta x_i}{\sum q(x_i) \Delta x_i} = \frac{\int x q(x) dx}{\int q(x) dx}$$

Im *zweidimensionalen* Fall wird eine kontinuierlich verteilte Kraft durch den *Druck*  $p = p(x, y)$  charakterisiert. Die auf ein infinitesimal kleines Flächenelement  $dA$  wirkende



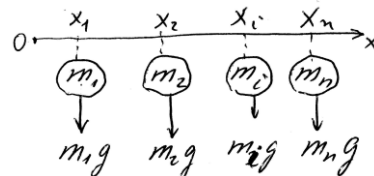
Kraft ist gleich  $dF = p(x, y)dA$ .  
Für die Schwerpunktkoordinate

ergibt sich

$$x_s = \frac{\sum x_i p(x_i, y_i) \Delta A_i}{\sum p(x_i, y_i) \Delta A_i} = \frac{\int x p(x, y) dA}{\int p(x, y) dA} \quad y_s = \frac{\int y p(x, y) dA}{\int p(x, y) dA}$$

### III. Schwerpunkt von Schwerkraften

Den wichtigsten Sonderfall eines Systems von



parallelen Kräften stellen Schwerkraften dar. Die auf einen Körper mit der Masse

$m_i$  wirkende Kraft ist gleich  $F_i = m_i g$ . Alle Kräfte haben dieselbe Richtung. Aus der allgemeinen Formel für die Koordinate des Schwerpunkts folgt:

$$x_s = \frac{\sum x_i m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum x_i m_i}{m}$$

( $m$  ist hier die Gesamtmasse aller Körper).

Ähnliches gilt für die  $y$  und  $z$ -Koordinaten des

Schwerpunkts:  $y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$ ,  $z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$ .

Bei kontinuierlichen Körpern werden die Summen durch Integrale ersetzt:

$$x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \Rightarrow \frac{\int x dm}{m}, \quad y_s = \frac{\int y dm}{m}, \quad z_s = \frac{\int z dm}{m}$$

Das Differential der Masse kann als  $dm = \rho dV$  geschrieben werden, wobei  $\rho$  die Dichte des Körpers ist und  $dV$  ein infinitesimal kleines Volumen. Somit nehmen die obigen Gleichungen die folgende Form an:

$$x_s = \frac{\int x \rho dV}{m}, \quad y_s = \frac{\int y \rho dV}{m}, \quad z_s = \frac{\int z \rho dV}{m}$$

### IV. Berechnung von Integralen

Integrieren ist eine Umkehroperation zum Differenzieren: Eine Funktion  $G(x)$ , deren Ableitung gleich  $g(x)$  ist, heißt ein *unbestimmtes Integral* von  $g(x)$  (auch *Stammfunktion* von  $g(x)$ ). Eine Tabelle von Ableitungen ist daher gleichzeitig - rückwärts gelesen - eine Tabelle von unbestimmten Integralen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $g(x) = f'(x) = \frac{df}{dx}$	Funktion $g(x)$	Stammfunktion (unbestimmtes Integral) $G(x) = \int g(x) dx$
$x$	$1$	$1$	$x$
$x^2$	$2x$	$x$	$x^2/2$
$x^3$	$3x^2$	$x^2$	$x^3/3$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$x^{n-1}$	$x^n/n$
$x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$x^{-1/2}$	$2x^{1/2}$
$x^{3/2}$	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$
$e^{kx}$	$ke^{kx}$	$e^{kx}$	$e^{kx}/k$
$\sin ax$	$a \cos ax$	$\cos ax$	$(\sin ax)/a$
$\cos ax$	$-a \sin ax$	$\sin ax$	$-(\cos ax)/a$
$\ln x$	$1/x$	$1/x$	$\ln x$

Die Berechnung von *bestimmten* Integralen beruht auf der Newtonschen Gleichung:

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$$

Bei der Berechnung von Integralen wird auch der Begriff "Differential" oft benutzt:

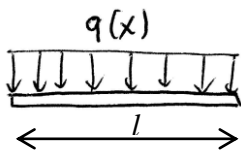
$$df = f' dx$$

Zum Beispiel,  $d(x^2) = 2x dx$ .

Unter der Benutzung des Begriffs "Differential" wird die Eigenschaft, daß Integrieren und Differenzieren zu einander Umkehroperationen sind, besonders klar:

$$\int df(x) = f(x), \quad d \int g(x) dx = g(x) dx$$

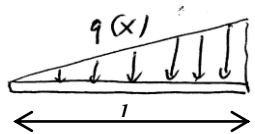
### V. Beispiele



**B1.** Zu berechnen ist der Schwerpunkt einer konstanten Streckenlast.

*Lösung:*  
 $q(x) = q_0 = \text{const.}$

$$x_s = \frac{\int_0^l x q(x) dx}{\int_0^l q(x) dx} = \frac{\int_0^l x q_0 dx}{\int_0^l q_0 dx} = \frac{q_0 \int_0^l x dx}{q_0 \int_0^l dx} = \frac{x^2/2 \Big|_0^l}{x \Big|_0^l} = \frac{l^2/2}{l} = \frac{l}{2}$$

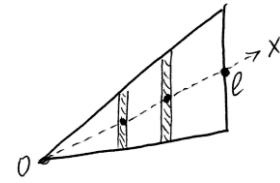


**B2.** Zu berechnen ist der Schwerpunkt einer linear steigenden Streckenlast.

*Lösung:*  $q(x) = ax$

$$x_s = \frac{\int_0^l x q(x) dx}{\int_0^l q(x) dx} = \frac{\int_0^l x a x dx}{\int_0^l a x dx} = \frac{a \int_0^l x^2 dx}{a \int_0^l x dx} = \frac{[x^3/3]_0^l}{[x^2/2]_0^l} = \frac{l^3/3}{l^2/2} = \frac{2}{3}l$$

**B3.** Zu berechnen ist die Lage des Schwerpunktes eines homogenen Dreiecks.



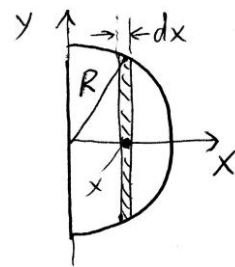
*Lösung:* Bei jedem dünnen Streifen liegt der Schwerpunkt in der Mitte und kann durch die in der Mitte angreifende Resultierende ersetzt werden. Angriffspunkte aller solcher "Teilresultierenden" liegen auf der Seitenhalbierenden des Dreiecks. Sie stellen eine linear steigende Streckenlast dar.

Der Schwerpunkt teilt somit die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (s. Beispiel 2).

### B4. Schwerpunkt eines Halbkreises

Die Fläche des dünnen Streifens ist  $dA = 2y dx$ . Aus dem Satz des Pythagoras

folgt  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Die Koordinate des Schwerpunkts berechnet sich daher als



$$x_s = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \sigma dA}{\int \sigma dA} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$= \frac{\int x dA}{A} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

( $\sigma$  ist die Flächendichte der Platte).

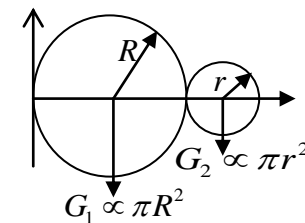
Das letzte Integral berechnet sich z.B. mit Hilfe der Substitution  $R^2 - x^2 = z$ ,

$$-2x dx = dz, \quad x \Big|_0^R \rightarrow z \Big|_{R^2}^0 \Rightarrow$$

$$x_s = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{2}{\pi R^2} \int_{R^2}^0 \sqrt{z} dz$$

$$= -\frac{2}{\pi R^2} \left[ \frac{2}{3} z^{3/2} \right]_{R^2}^0 = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.424R$$

### VI. Zusammengesetzte Figuren



**B5.** Die

Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte  $G_1$  und  $G_2$

sind  $x_1 = R$ ,

$x_2 = 2R + r$ .

Für die Koordinate des Schwerpunktes ergibt sich

$$x_s = \frac{x_1 G_1 + x_2 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R\pi R^2 + (2R + r)\pi r^2}{\pi(R^2 + r^2)}$$

$$= \frac{R^3 + r^3 + 2Rr^2}{R^2 + r^2}$$

**B6.**

