Festigkeitshypothesen

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 3.3.**

I. Allgemeine Überlegungen zu den Festigkeitshypothesen.

Bei einem "einfachen Spannungszustand", (z.B. bei einer einachsigen Dehnung eines Stabes) kann man durch Experimente feststellen, bei welcher kritischen Spannung der Stab "versagt" (z.B. sich plastisch deformiert oder bricht). Die zulässige Spannung soll kleiner sein als diese kritische Spannung $\sigma < \sigma_c$. Ähnliche kritische Spannungen kann man auch bei anderen "einfachen Spannungszuständen" ermitteln, z.B. die kritische Schubspannung τ_c: Damit der Stab bei einer Schubbeanspruchung im elastischen Zustand bleibt, muss die Bedingung $\tau < \tau_c$ erfüllt sein. Haben wir es mit einem komplexen Spannungszustand zu tun (z.B. wirken gleichzeitig eine axiale Kraft und ein Torsionsmoment), so stellt sich die Frage, wann der Stab unter dieser komplexen Beanspruchung versagt.

Eine einfache Zusammensetzung der Bedingungen $\sigma < \sigma_c$, $\tau < \tau_c$ wäre dabei falsch! Davon kann man sich am einfachsten durch die folgenden Überlegungen überzeugen: Die Spannungskomponenten sind bezüglich der Rotationen nicht invariant. Es kann sein, dass in einem Koordinatensystem beide Gleichungen erfüllt sind und im anderen eine erfüllt und die andere nicht erfüllt. Das würde bedeuten, dass bezüglich eines Koordinatensystems das Medium noch im elastischen Zustand ist und im anderen schon im plastischen. Das kann aber nicht sein. Die Aussage, ob der Körper immer noch elastisch oder bereits plastisch deformiert wird, ist eine absolute Aussage, die von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen darf. Der Körper ist entweder im elastischen oder im plastischen Zustand, egal ob wir auf ihn von oben, von unter oder irgendwie schräg sehen. Das bedeutet, dass ein Kriterium für den Beginn der plastischen Deformation ist, dass es nur Spannungskomponenten in solchen Kombinationen enthalten kann, die invariant bezüglich der Achsenrotationen sind. Es gibt aber nur drei unabhängigen Invarianten des Spannungstensors. Als diese können z.B. die drei Hauptspannungen gewählt werden oder die Invarianten I_1, I_2, I_3 (Spur, Summe der Quadraten aller Komponenten und die Determinante).

Ein Kriterium für das Einsetzen der plastischen Deformation oder des Bruches muss mit Hilfe dieser Invarianten formuliert werden. Die drei Invarianten bestimmen den Spannungszustand eindeutig. Das bedeutet, dass zwei verschiedene Spannungszustände, mit zwei verschiedenen Spannungstensoren, die aber die gleichen drei Invarianten besitzen, in Wirklichkeit die gleichen Spannungszustände sind. Man kann zeigen, dass die drei Hauptspannungen sich durch die drei Invarianten ausdrücken lassen. Wenn Sie zwei verschiedene Spannungszustände haben bei denen alle drei Invarianten gleich sind, so sind auch die drei Hauptspannungen gleich. Das heißt, Sie haben zwei gleich beanspruchte Gebiete, die nur räumlich verschieden orientiert sind. Aber in einem isotropen Medium kann die Festigkeit nicht von der Orientierung des Spannungszustandes abhängen. Wenn wir gleich stark ziehen, dann ist es egal in welche Richtung.

Das ist natürlich nur für isotrope Medien richtig. Dies sind aber viele klassische Werkstoffe, wie Mauerwerk oder noch besser polykristalline metallische Werkstoffe. Haben Sie ein Faserverbund, so hängt seine Festigkeit natürlich sehr wesentlich davon ab, ob in Richtung der Faser oder senkrecht dazu gezogen wird. Wir reden also jetzt nicht von den modernen Werkstoffen solcher Art wie Faserverbunde oder Laminate, bei denen alles noch komplizierter ist, sondern nur von klassischen isotropen Werkstoffen, wie Stahl, Aluminium und ähnliches.

II. Die wichtigsten Festigkeitshypothesen

1. Normalspannungshypothese

Hier wird angenommen, dass für die Materialbeanspruchung die größte Normalspannung maßgeblich ist. Diese wird durch die größte der drei Hauptspannungen gegeben.

Beispiele: Bei einem einachsigen Zug ist die maximale Hauptspannung einfach gleich der Zugspannung σ_{Zug}. Wenn diese den kritischen Wert σ_c erreicht, versagt das Bauteil. Wird dasselbe Material mit der Spannung τ *auf Schub* belastet, so sind die Hauptspannungen gleich $\pm\tau$. das Bauteil versagt beim Überschreiten des kritischen Wertes $\tau = \sigma_c$.

2. Schubspannungshypothese

Dieser Hypothese liegt die Annahme zugrunde, dass die Materialbeanspruchung durch die maximale Schubspannung charakterisiert werden kann. Das Material versagt, wenn die größte Schubspannung den kritischen Wert τ_c überschreitet.

Beispiele: Bei Beanspruchung auf Schub lautet das Versagenskriterium $\tau = \tau_c$. Bei einer einachsigen Dehnung mit der Zugspannung σ ist die maximale Schubspannung gleich $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma$ und das Material versagt, wenn die Zugspannung den Wert $2\tau_c$ übersteigt.

3. von Mises-Kriterium

Vorüberlegungen

Durch physikalische Überlegungen kann man meistens feststellen, dass nicht alle drei Invarianten die gleiche Rolle spielen. Was ist z.B. die erste Invariante des Spannungstensors? Es ist immer möglich, die Koordinatenachsen so zu drehen, dass alle drei Diagonalkomponenten des Spannungstensors gleich sind und der Spannungszustand somit in eine Superposition aus einem hydrostatischen Druck und einer reinen Scherung zerlegt werden kann. Nun ist es ziemlich einfach zu verstehen, dass der hydrostatische Druck und die Schubspannung völlig verschiedene Wirkung in Bezug auf die Festigkeit haben. Den hydrostatischen Druck können alle Körper sehr gut und unendlich lange aushalten. Selbst solche fließende Medien wie Flüssigkeiten oder Gase halten einen allseitigen Druck sehr gut aus. Legen Sie dagegen eine auch sehr kleine Schubspannung an, so beginnen sie zu fließen.

Wir reden jetzt von zähen Werkstoffen, wie Stahl, Kupfer oder Aluminium. Für diese Materialien ist es ziemlich egal, ob der hydrostatische Druck da ist oder nicht. Versuchen wir, diese Erkenntnis mathematisch auszudrücken.

Nehmen wir an, wir haben einen beliebigen Spannungszustand. Wir können die Achsen so drehen, dass wir diesen Zustand als eine Superposition eines hydrostatischen Drucks und einer Scherung darstellen. Den hydrostatischen Druck ziehen wir ab, da er keine Rolle spielt. Unsere Behauptung ist also, dass der Deviationstensor im Sinne der Festigkeit dem ursprünglichen Tensor äquivalent ist. Welche Invarianten des Spannungstensors gibt es nun? Die erste Invariante (Spur) ist jetzt Null, die haben wir angezogen. Die zweite Invariante ist die Summe aller Quadrate, die dritte Invariante ist die Determinante. Es gibt viele Spannungszustände, für die die dritte Invariante gleich Null ist. Ist eine der (Hauptschub-komponenten gleich Null, so ist die dritte Invariante identisch Null, egal wie groß die anderen Komponenten sind. Die zweite Invariante aber wohl nicht. Im Fall, wenn beide Invarianten nicht Null sind, gibt es keine theoretischen Gründe, warum nur eine der beiden eine wichtigere Rolle spielen soll. Man nimmt aber meistens an, dass die dritte Invariante keine Rolle spielt. Wenn wir das annehmen, lautet das Festigkeitskriterium: $I_2 < I^*$. In dem Fall, für den nur zwei der Komponenten nicht Null sind, ist das ein exaktes Kriterium und uns bleibt nur zu hoffen, dass dies auch für andere Fälle eine brauchbare Interpolationsformel darstellt.

Beim von Mises-Kriterium nimmt man also an, dass der hydrostatische Druck keinen Einfluss auf die Festigkeit des Materials hat. Vom Spannungstensor kann daher der hydrostatische Anteil abgezogen werden:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_z & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2}{3}\sigma_z - \frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y \end{pmatrix}$$

Die quadratische Invariante dieses Tensors ist gleich

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\tfrac{2}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_y - \tfrac{1}{3}\sigma_z\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\sigma_y - \tfrac{1}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_z\right)^2 \\ &+ \left(\tfrac{2}{3}\sigma_z - \tfrac{1}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_y\right)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 \\ &= 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 \\ &+ \tfrac{2}{3}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z\right) \end{aligned}$$

Ist die kritische Spannung bei einem einfachen Zugexperiment gleich σ_c, so bedeutet das, dass der kritische Wert der zweiten Invariante ist gleich $I_{2,c} = \frac{2}{3}\sigma_c^2$. Bei einem reinen Schub würde das Material bei der kritischen Spannung versagen, die der Bedingung

$2\tau_c^2 = I_c = \frac{2}{3}\sigma_c^2$ genügt. Daraus folgt $\tau_c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_c$.

Das von Mises Kriterium lautet

$$\sqrt{3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2 + \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z\right)} = \sigma_c$$