Knickung

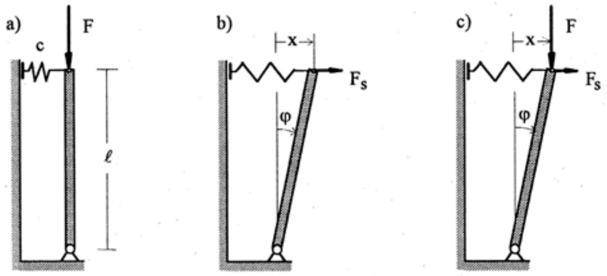
Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 7.2**

I. Begriff Stabilität

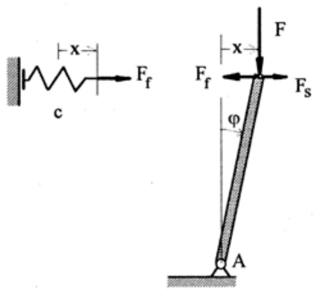
Eine Gleichgewichtslage ist stabil, wenn das System nach einer kleinen Störung des Gleichgewichtes wieder in die ursprüngliche Position zurückkehrt.

II. Statische Stabilität von Feder-Stab-Systemen

Zur Einführung betrachten wir einen gelenkig gelagerten starren Stab, der durch eine Feder gehalten wird.



Unter der Wirkung einer Kraft F in der Längsrichtung verschiebt sich der Stab nicht (a). Unter Einwirkung einer kleinen Störkraft F_s verschiebt es sich geringfügig (b). Wenn aber beide Kräfte gleichzeitig wirken, kann es zu einer großen Auslenkung kommen, auch wenn die Störkraft unendlich klein ist: es tritt eine Instabilität auf.



Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes nehmen wir an, daß alle Winkel und Auslenkungen sehr klein sind. Wir werden alle Terme zweiter oder höherer Ordnung vernachlässigen (dieses Vorgehen nennt man *Theorie zweiter Ordnung*). Unter anderem gilt in dieser Näherung:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - ... \approx \varphi,$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - ... \approx 1,$$

In der gleichen Näherung ist $x = l\varphi$.

Für die Federkraft gilt $F_f = cx$. Die Momentengleichgewichtsbedingung bezüglich des Gelenkes A lautet:

$$\left(F_f - F_s\right) l\cos\varphi - Fx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(cx - F_s\right) l \cdot 1 - Fx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{F_s l}{cl - F}.$$

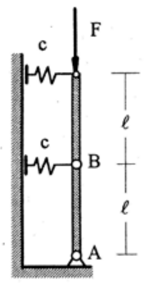
Offenbar ist $\lim\limits_{F\to cl} \dfrac{F_s l}{cl - F} = \infty$.

Instabilitätsbedingung aus anderer Sicht:
Gibt es keine Störkraft, so lautet die Gleichgewichtsbedingung: $\left(cl - F\right) x = 0$.

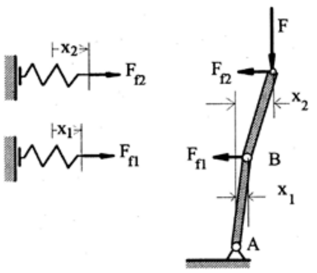
Bei $F \neq cl$ hat diese Gleichung eine einzige Lösung $x = 0$. Bei der kritischen Kraft $F = cl$ dagegen, kann x einen *beliebigen Wert* annehmen.

Das liegt daran, daß zwischen einem stabilen und einem instabilen Zustand immer ein indifferenter Zustand liegt. *Wir können diesen kritischen Zustand gerade daran erkennen, daß es unendlich viele Gleichgewichtspositionen gibt.*

B1. Wie groß ist die kritische Last für dieses Zweistabsystem?



<u>*Lösung:*</u> Wir lassen kleine Verschiebungen des Systems aus der geraden Lage zu und stellen Gleichgewichtsbedingungen *am verformten* System auf. Unser Anliegen ist festzustellen, unter welchen Bedingungen sich das System im indifferenten Gleichgewicht befindet. Das ist gerade der kritische Zustand.



Das Momentengleichgewicht für das *Gesamtsystem* bezüglich des Gelenkes *A* lautet

$$F_{f1} l + 2F_{f2} l - Fx_2 = 0$$

Das Momentengleichgewicht für den *oberen Stab* bezüglich des Gelenkes *B* lautet
$F_{f2} l - F(x_2 - x_1) = 0$. Mit den Federkräften
$F_{f1} = cx_1$, $F_{f2} = cx_2$ führen die Gleichungen auf

$$clx_1 + \left(2cl - F\right) x_2 = 0,$$

$$Fx_1 + \left(cl - F\right) x_2 = 0.$$

Die kritische Last ist die Größe, bei der es unendlich viele Gleichgewichtslagen gibt. Ein lineares Gleichungssystem hat nur dann nicht triviale Lösungen, wenn seine Determinante gleich Null ist:

$$\begin{vmatrix} cl & 2cl-F \\ F & cl-F \end{vmatrix} = F^2 - 3clF + (cl)^2 = 0 .$$

Diese *charakteristische Gleichung* hat zwei Lösungen

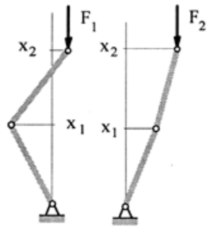
$F_{1,2} = \left(1.5 \pm \sqrt{1.25}\right) cl$ und damit ist

$F_1 = 0.38cl$ und $F_2 = 2.62cl$.

Die Lösungen selbst sind:

bei F_1 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = const_1 \begin{pmatrix} -0.85 \\ 0.53 \end{pmatrix}$,

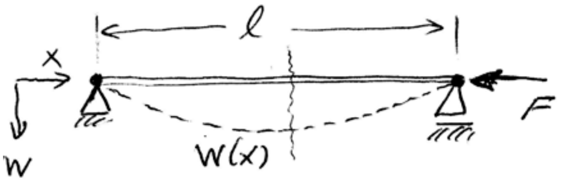
bei F_2 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = const_2 \begin{pmatrix} 0.53 \\ 0.85 \end{pmatrix}$.



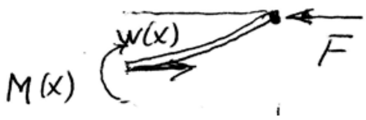
Das sind die *Knickeigenformen.*

III. Knickstab

Betrachten wir den unten abgebildeten Stab.



Durch Freischneiden bei einer Koordinate x



wird das Biegemoment sichtbar. Das Momentengleichgewicht *bezüglich des Schnittpunktes* lautet:

$-M(x) + Fw(x) = 0$

Für das Biegemoment gilt aber

$M(x) = -EIw''(x)$.

Daraus ergibt sich die Gleichung

$EIw''(x) + Fw(x) = 0$ oder

$w''(x) + \lambda^2 w(x) = 0$ mit $\lambda^2 = \dfrac{F}{EI}$.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$w(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$.

Die Konstanten A und B werden aus den Randbedingungen bestimmt. In diesem Fall:

$w(0) = w(l) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$, $A\sin\lambda l = 0$.

Die letztere Gleichung ist erfüllt entweder wenn $A = 0$ oder wenn $\sin\lambda l = 0$. Nur die letztere Bedingung entspricht einer nicht trivialen Lösung. Daraus folgt $\lambda l = \pi n$ (n ist eine ganze Zahl),

$$\lambda^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = \frac{F}{EI} \;\Rightarrow\; \boxed{F_k = EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}.$$

Die Eigenformen sind $\boxed{w(x) = A\sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right)}$

IV. Knickspannungen

Die Druckspannung bei der kritischen Knicklast ist gleich $\sigma_{Knick} = \dfrac{F_k}{A} = \dfrac{\pi^2 EI}{Al^2}$.

Vergleichen wir diese Spannung mit der Spannung σ_{pl} , bei der der Stab durch plastische Deformation versagt. Die beiden Spannungen sind gleich wenn $\dfrac{\pi^2 EI}{Al^2} = \sigma_{pl}$.

Für einen runden Stab mit dem Radius a gilt

$I = \dfrac{\pi a^4}{4}$, $A = \pi^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\pi^2 a^2}{4l^2} = \dfrac{\sigma_{pl}}{E} \;\Rightarrow$

$\dfrac{l}{a} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_{pl}}}$.

Für Stahl: $E \approx 200\,\text{GPa}$, $\sigma_{pl} \approx 500\,\text{MPa}$,

$\dfrac{l}{a} \approx 1.5\sqrt{400} = 30$ oder $\dfrac{l}{d} \approx 15$.

Stählerne Stäbe mit $\dfrac{l}{d} < 15$ versagen durch plastische Deformation. Stäbe mit $\dfrac{l}{d} > 15$ versagen durch Knickung.