

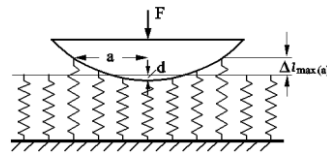
Kontaktmechanik mit der Methode der Dimensionsreduktion (MDR) II.

Lit.: V.L. Popov & M. Heß, *Method of Dimensionality reduction in contact mechanics and friction: A users handbook. I. Axially-symmetric contacts*, Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering, 2014, v. 12, N.1, pp.1-14.
<http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUMechEng/article/view/155/47> (open access)

I. Adhäsiver Kontakt. Zwischen beliebigen Körpern gibt es relativ schwache und schnell mit dem Abstand zwischen den Oberflächen abfallende Wechselwirkungskräfte (van der Waals-Kräfte), die zur gegenseitigen Anziehung der Körper führen und als *Adhäsionskräfte* bekannt sind. Sie spielen eine wichtige Rolle in den Anwendungen, wo eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Die Oberflächen der Körper sind sehr glatt (wie z.B. die der magnetischen Scheibe von Festplatten)
- (ii) Einer der Kontaktpartner besteht aus einem sehr weichen Material (Gummi oder biologische Strukturen) oder
- (iii) Es handelt sich um mikroskopische Systeme (mikromechanische Geräte, Atomkraftmikroskope, biologische Strukturen u.ä.).

Anwendung der MDR: Wird der effektive Profil in die effektive Winklersche Bettung zunächst eingedrückt und dann gezogen, so werden die Federn am Rande des Kontaktes abspringen wenn die Auslenkung der Feder den kritischen Wert



$$\Delta l_{\max}(a) = \sqrt{\frac{2a\pi\gamma_{12}}{E^*}} \quad (1)$$

übersteigt, wobei γ_{12} die Trennungsarbeit pro Flächeneinhalt ist (*Regel von Heß*). Der kritische Kontaktradius im Moment der vollständigen Trennung beider Körper bestimmt sich aus

$$\left. \frac{dg(a)}{da} \right|_{a=a_c} = \sqrt{\frac{9\pi\gamma_{12}}{2a_c E^*}} \quad (2)$$

Die dabei wirkende Kraft wird *Adhäsionskraft* genannt. Sie ist gleich

$$F_A = 2E^* \left[a_c \Delta l_{\max}(a_c) - \int_0^{a_c} xg'(x) dx \right] \quad (3)$$

Der Zusammenhang zwischen der Normalkraft, der Eindringtiefe und dem Kontaktradius entsprechen dabei immer *exakt* denen des ursprünglichen dreidimensionalen Problems. Am einfachsten wird die Adhäsionskraft zwischen einem Zylinder mit dem Radius a und einem elastischen Halbraum berechnet. In diesem Fall ist das Integral in der Gleichung (3) gleich Null und die Adhäsionskraft wird alleine durch das erste Glied gegeben:

$F_A = 2E^* a \Delta l_{\max}(a) = \sqrt{8\pi a^3 E^* \gamma_{12}}$ (Kendall, 1970). Für ein parabolisches Profil $f(r) = r^2 / 2R$ gilt $g(x) = x^2 / R$. Die Gleichung (2) nimmt die Form $\frac{2a_c}{R} = \sqrt{\frac{9\pi\gamma_{12}}{2a_c E^*}}$ an.

Für den kritischen Radius folgt $a_c = \left(\frac{9\pi\gamma_{12} R^2}{8E^*} \right)^{1/3}$. Einsetzen in (3) ergibt die Adhäsions-

$$F_A = 2E^* \left[a_c \sqrt{\frac{2a_c \pi \gamma_{12}}{E^*}} - \frac{2}{3} \frac{a_c^3}{R} \right] = \frac{3}{2} \pi R \gamma_{12}$$

(Johnson, Kendall, Roberts, 1971). Berechnungen für andere Profile sind genauso einfach und sind in der unten folgenden Tabelle zusammengefasst.

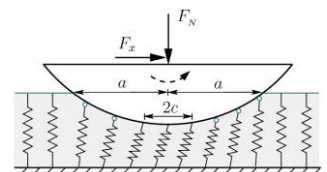
Beispiele für adhäsive Normalkontakte

a_c	a	$\left(\frac{9\pi\Delta\gamma R^2}{8E^*} \right)^{1/3}$	$\frac{18\Delta\gamma}{\pi E^* \tan^2 \theta}$
F_A	$\sqrt{8\pi a^3 E^* \Delta\gamma}$	$\frac{3}{2} \pi \Delta\gamma R$	$\frac{54\Delta\gamma^2}{\pi \tan^3 \theta \cdot E^*}$

II. Tangentialkontakt. Betrachten wir einen axialsymmetrischen Indenter, der zunächst mit einer Normalkraft F_N in den elastischen Halbraum gedrückt und anschließend durch eine Tangentialkraft F_x in x -Richtung beansprucht wird. Bei kleiner Tangentialkraft entsteht am Rande des Kontaktgebietes ein ringförmiges Gleitgebiet, welches sich bei steigender Kraft nach Innen ausbreitet bis das vollständige Gleiten einsetzt. Den Radius des Haftgebietes bezeichnen wir durch c .

Anwendung der MDR: Ein solcher Tangentialkontakt wird innerhalb der MDR wie folgt gelöst: Das modifizierte Profil g wird in die Winklersche Bettung, gekennzeichnet durch die Steifigkeiten gemäß

$k_z = E^* \Delta x$ und $k_x = G^* \Delta x$, mit der Normalkraft F_N eingedrückt und dann tangential um $u_x^{(0)}$ verschoben



ben. Jede Feder haftet am Indenter und verschiebt sich zusammen mit ihm, solange die Tangentialkraft $\Delta F_x = k_x u_x^{(0)}$ kleiner $\mu \Delta F_z$ ist. Nachdem die Haftkraft erreicht ist, beginnt die Feder zu gleiten und die Kraft bleibt konstant und gleich $\mu \Delta F_z$. In einem Tangentialkontakt mit dem Reibungskoeffizienten μ sind die Federn im Haftzustand wenn $|k_x u_x| < \mu k_z u_z$. Der Radius des Haftgebietes bestimmt sich aus der Gleichung $|k_x u_x^{(0)}| < \mu k_z u_z(c)$. Unter Berücksichtigung der Gleichung $u_z(x) = d - g(x)$ ergibt sich die bestimmende Gleichung

$$G^* u_x^{(0)} = \mu E^* d - g(c) .$$

Maximale Verschiebung bis zum Beginn des Gleitens erhält man durch Einsetzen $c = 0$ (Verschwinden des Haftgebietes). Sie ist gleich $u_{x,\max} = \mu d E^* / G^* \approx 1.2 \cdot \mu d$ und wird nur durch die Eindringtiefe bestimmt (ist also unabhängig von der Form des Indenters). Die Tangentialverschiebung ist gleich

$$u_x(x) = \begin{cases} u_x^{(0)}, & \text{für } x < c \\ \mu \left(\frac{E^*}{G^*} \right) (d - g(x)), & \text{für } c < x < a \end{cases}$$

und die Streckenlast

$$q_x(x) = \begin{cases} G^* u_x^{(0)}, & \text{für } x < c \\ \mu E^* (d - g(x)), & \text{für } c < x < a \end{cases} .$$

Für die Tangentialkraft ergibt sich

$$F_x = 2 \int_0^a q_x(x) dx = 2 \mu E^* \left[c(d - g(c)) + \int_c^a (d - g(x)) dx \right]$$

Die Normalkraft wird durch die Gleichung

$$F_N = E^* \int_{-a}^a u_z(x) dx = 2 E^* \int_0^a (d - g(x)) dx$$

gegeben und das Verhältnis $F_x / (\mu F_N)$ durch

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = \frac{\int_0^a x g'(x) dx}{a g(a) - \int_0^a g(x) dx} .$$

Beispiele für Tangentialkontakte

1. Zylinder: Kein Gleitgebiet. Das Gleiten beginnt sofort in der gesamten Kontaktfläche.

2. Kugel: $u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \frac{c^2}{R} \right), \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3 .$

3. Kegel: $u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \frac{\pi}{2} c \tan \theta \right),$

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2 .$$

4. Potenzprofil $f(r) = c_n r^n .$

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} d - \kappa_n c_n c^n, \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a} \right)^n .$$

III. Rauer Kontakt. Reale Oberflächen sind auf der Mikroskala immer rau. Die Rauheit zeigt oft die Eigenschaft der „Selbstaffinität“ (d.h. sie sieht bei verschiedenen Vergrößerungen ähnlich aus). Die genaue Art der Selbstaffinität wird durch den sogenannten Hurst-Exponenten H charakterisiert. Zur Simulation von rauen Oberflächen kann man folgende Äquivalenzregel benutzen: Ein zylindrischer Stempel mit Durchmesser L und Rauheit, die durch den quadratischen Mittelwert h und den Hurst-Exponenten H charakterisiert wird, kann durch das Profil

$$g(x) = \zeta(H) h x / L^H \quad (4)$$

repräsentiert werden. Für den mittleren Bereich von Hurst-Exponenten ($0.3 < H < 0.7$) gilt $\zeta(H) \approx 4$. Das bedeutet, dass die raue Oberfläche durch eine einzige Spitze ersetzt wird, die durch ein Potenzgesetz beschrieben wird.

