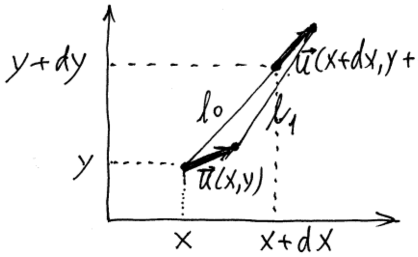
I. Verzerrungstensor

Nicht jede Bewegung eines elastischen Körpers ist mit seiner Deformation verbunden: Verschiebung als Ganzes oder Rotation als Ganzes sind Beispiele von Bewegungen ohne Verzerrung. Ein offensichtliches Merkmal einer "richtigen" Verzerrung ist Änderung der Abstände zwischen den Punkten des Körpers.
Betrachten wir als erstes einen *ebenen* Verzerrungszustand.



Wählen wir im *nicht deformierten* Zustand eines elastischen Körpers zwei nahe liegenden Punkte mit Koordinaten (x, y) und $(x+dx, y+dy)$. Wird der Körper deformiert, so verschieben sich diese beiden Punkte in neue Positionen $(x+u_x(x,y), y+u_y(x,y))$ und $(x+dx+u_x(x+dx,y+dy),$
$y+dy+u_y(x+dx,y+dy))$.
Der ursprüngliche Abstand zwischen den Punkten war $l_0^2 = dx^2 + dy^2$. Der Abstand nach der Deformation ist gleich

$$l_1^2 = \left(dx + u_x(x+dx,y+dy) - u_x(x,y)\right)^2 + \\ +\left(dy + u_y(x+dx,y+dy) - u_y(x,y)\right)^2 .$$

Mit Hilfe von Taylor-Reihen erhalten wir

$$u_x(x+dx,y+dy) - u_x(x,y) \approx \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy ,$$

$$u_y(x+dx,y+dy) - u_y(x,y) \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}dx + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy .$$

Berechnung der Längenänderung unter Beibehaltung Glieder kleinster (2.) Ordnung ergibt

$$l_1^2 - l_0^2 = \\ = 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)dxdy + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy^2\right)$$

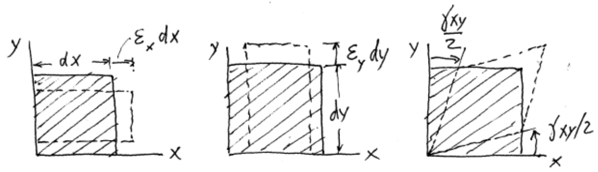
Die Abstandsänderung in *einer beliebigen Richtung* und somit der Deformationszustand ist eindeutig bestimmt durch die drei Größen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \text{ und } \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

Sie sind Komponenten eines symmetrischen *Verzerrungstensors*

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}.$$

Den mechanischen Sinn einzelner Komponenten des Verzerrungstensors kann man den folgenden Skizzen entnehmen.



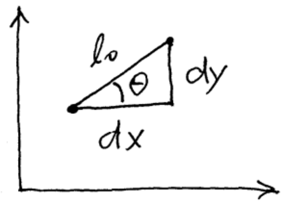
Die Komponenten ε_x und ε_y auf der Hauptdiagonale nennt man *Dehnungen*, die auf der Nebendiagonale *Gleitung*, *Scherung* oder *Winkelverzerrung.*

II. Dehnung als Funktion des Winkels

Mit Hilfe des Verzerrungstensors kann die Abstandsänderung zwischen zwei Punkten wie folgt umgeschrieben werden

$$l_1^2 - l_0^2 = 2\left(\varepsilon_x dx^2 + \gamma_{xy}dxdy + \varepsilon_y dy^2\right)$$

oder $l_0 dl = \varepsilon_x dx^2 + \gamma_{xy}dxdy + \varepsilon_y dy^2$.



Aus der Skizze ist sichtbar, dass $dx = l_0 \cos\theta$ und $dy = l_0 \sin\theta$.
Dies setzen wir in die oben stehende Gleichung ein und bekommen

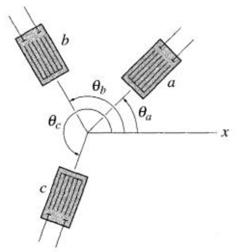
$$l_0 dl = l_0^2\left(\varepsilon_x \cos^2\theta + \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta\right)$$

Für die Dehnung $\varepsilon(\theta) = dl/l_0$ in Richtung θ ergibt sich

$$\boxed{\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2\theta + \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta} \quad (1)$$

III. Messung von Deformationen mit Dehnungsmeßstreifenrosetten

Zur Messung von Deformationen werden oft Dehnungsmeßstreifen benutzt, deren elektrischer Widerstand von der Dehnung des Streifens in Richtung seiner Achse abhängt. Zur Messung von allen drei Komponenten des Verzerrungstensors muß man drei nahe an einander liegende Streifen benutzen: die Dehnungsmeßstreifenrosetten.



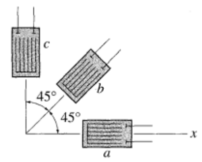
Betrachten wir zunächst eine Rosette mit beliebigen Winkeln. Die durch einzelne Streifen gemessenen Dehnungen sind:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2\theta_a + \gamma_{xy}\cos\theta_a \sin\theta_a + \varepsilon_y \sin^2\theta_a$$
$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2\theta_b + \gamma_{xy}\cos\theta_b \sin\theta_b + \varepsilon_y \sin^2\theta_b$$
$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2\theta_c + \gamma_{xy}\cos\theta_c \sin\theta_c + \varepsilon_y \sin^2\theta_c$$

Auflösung dieses Gleichungssystems bezüglich ε_x, ε_y, γ_{xy} liefert alle drei Komponenten des Verzerrungstensors.

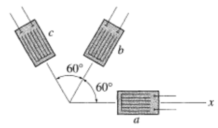
45°-Rosette ($\theta_a = 0$, $\theta_b = 45°$, $\theta_c = 90°$):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$



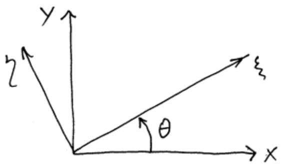
$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$$

60°-Rosette ($\theta_a = 0$, $\theta_b = 60°$, $\theta_c = 120°$):



$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$
$$\varepsilon_y = \tfrac{1}{3}\left(2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a\right)$$
$$\gamma_{xy} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon_b - \varepsilon_a\right)$$

IV. Koordinatentransformation



Die Gleichung (1) kann man auch allgemeiner Interpretieren: $\varepsilon(\theta)$ ist offenbar die ε_ξ-Dehnung im gedrehten Koordinatensystem. Die ε_η-Dehnung in der Senkrechten zur ξ-Achse bekommen wir aus (1) durch Substitution $\theta \to \theta + \pi/2$, $\cos(\theta+\pi/2) = -\sin\theta$, $\sin(\theta+\pi/2) = \cos\theta$:

$$\varepsilon(\theta+\pi/2) = \varepsilon_x \sin^2\theta - \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y\cos^2\theta$$

Zusammenfassend gilt:

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x \cos^2\theta + \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta,$$
$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_x \sin^2\theta - \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta,$$

oder umgeformt:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \quad (2)$$
$$\varepsilon_\eta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \quad (3)$$
$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta . \quad (4)$$

(Die letzte Gleichung haben wir hier ohne Beweis hinzugefügt).

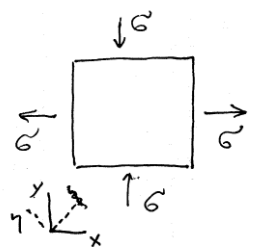
Es gibt immer zwei senkrecht zu einander stehende Achsen, in denen die Dehnungen maximale Werte erreichen und Winkelverzerrungen verschwinden - *Hauptachsensystem*. Seine Orientierung ist gegeben durch

$$\boxed{\tan 2\theta^* = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}}$$

Die *Hauptdehnungen* sind

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} .$$

B2. Zu untersuchen ist der Spannungs- und Deformationszustand eines wie nebenstehend beanspruchten Elementes einer Struktur.



<u>*Lösung:*</u> Die Achsen (x,y) sind Hauptachsen des Spannungstensors.

Die Spannungskomponenten $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$ sind die Hauptspannungen.

Die Hauptspannung in x-Richtung verursacht die folgenden Dehnungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E},\ \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma}{E} .$$

Die Hauptspannung in y-Richtung verursacht die folgenden Dehnungen:

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma}{E},\ \varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y = \nu\frac{\sigma}{E} .$$

Bei gleichzeitiger Wirkung gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}(1+\nu),\ \varepsilon_y = -\frac{\sigma}{E}(1+\nu) .$$

Auch für den Verzerrungstensor ist es das Hauptachsensystem Im Koordinatensystem (ξ,η) gedreht um 45° zu den Hauptachsen gibt es nur Schubkomponenten des Spannungs- und des Verzerrungstensors:

$$\tau_{\xi\eta} = \sigma,\ \frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = \frac{\sigma}{E}(1+\nu) = \frac{\tau}{E}(1+\nu) .$$

Der Koeffizient zwischen Schubspannung und Schubwinkel ist der Schubmodul:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}.$$