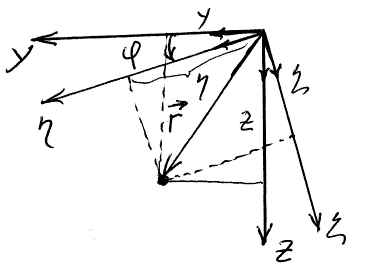
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 21. **Teil 2: Elastostatik**

Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente. Schiefe Biegung.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.2.3, 4.7**

I. Drehung des Bezugssystems



Betrachten wir zwei Koordinatensysteme (y, z) und (η, ζ). Das zweite sei relativ zum ersten um den Winkel φ gedreht.

Wir führen vier Einheitsvektoren $\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ entlang entsprechender Achsen ein. Betrachtet wird ein Punkt (Radiusvektor $\vec{r}$) mit den kartesischen Koordinaten *y*, *z*.

<u>Eine geometrische Hilfsaufgabe</u>: Zu bestimmen sind die kartesischen Koordinaten η, ζ im "gedrehten" Koordinatensystem.

Der Radiusvektor sieht ist im kartesischen System: $\vec{r} = y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Die Koordinaten η, ζ können als Skalarprodukte berechnet werden:

$$\eta = \vec{r} \cdot \vec{e}_\eta = \left(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_\eta ,$$

$$\zeta = \vec{r} \cdot \vec{e}_\zeta = \left(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_\zeta .$$

Für die Skalarprodukte der Einheitsvektoren gilt:

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\eta = \cos\varphi , \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\eta = \sin\varphi$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\zeta = -\sin\varphi , \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\zeta = \cos\varphi$$

η, ζ berechnen sich somit zu

$$\eta = y\cos\varphi + z\sin\varphi$$

$$\zeta = -y\sin\varphi + z\cos\varphi .$$

Für die Trägheitsmomente bezüglich η, ζ gilt

$$I_\eta = \int \zeta^2 dA = \int \left(-y\sin\varphi + z\cos\varphi\right)^2 dA$$
$$= \sin^2\varphi \int y^2 dA + \cos^2\varphi \int z^2 dA - 2\sin\varphi\cos\varphi \int yz dA$$
$$= I_z \sin^2\varphi + I_y \cos^2\varphi + 2I_{yz}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$I_\zeta = \int \eta^2 dA = \int \left(y\cos\varphi + z\sin\varphi\right)^2 dA$$
$$= \cos^2\varphi \int y^2 dA + \sin^2\varphi \int z^2 dA + 2\sin\varphi\cos\varphi \int yz dA$$
$$= I_z \cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi - 2I_{yz}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = -\int \eta\zeta dA$$
$$= -\int \left(-y\sin\varphi + z\cos\varphi\right)\left(y\cos\varphi + z\sin\varphi\right) dA$$
$$= \sin\varphi\cos\varphi \int y^2 dA - \sin\varphi\cos\varphi \int z^2 dA$$
$$+ \left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) \int yz dA$$

$$I_{\eta\zeta} = I_z \sin\varphi\cos\varphi - I_y \sin\varphi\cos\varphi + I_{yz}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

Diese Gleichungen können unter Berücksichtigung der Additionstheoreme

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\varphi\right), \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\varphi\right),$$

und $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$

wie folgt umgeschrieben werden:

$$\boxed{I_\eta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) + \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi + I_{yz}\sin 2\varphi}$$

$$\boxed{I_\zeta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) - \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi - I_{yz}\sin 2\varphi}$$

$$\boxed{I_{\eta\zeta} = -\tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi + I_{yz}\cos 2\varphi}$$

II. Invarianten

$$I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z = I_p \quad \text{und} \quad \left[\tfrac{1}{4}\left(I_\eta - I_\zeta\right)^2 + I_{\eta\zeta}^2\right]$$

III. Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente

Bei einem beliebigen Querschnitt kann man die Achsen um einen Winkel φ^* so drehen, daß das Deviationsmoment verschwindet:

$$I_{\eta\zeta} = -\tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi^* + I_{yz}\cos 2\varphi^* = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sin 2\varphi^*}{\cos 2\varphi^*} = \tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{\left(I_y - I_z\right)}. \qquad (1)$$

Gleichzeitig nehmen die axialen Trägheitsmomente extremale Werte an:

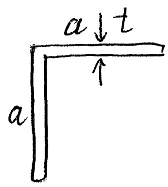
$$\frac{\partial I_\eta}{\partial\varphi} = -\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi + 2I_{yz}\cos 2\varphi = 0$$

Da $\tan 2\varphi^* = \tan 2\left(\varphi^* + \pi/2\right)$ gilt, hat die Gleichung (1) immer zwei Lösungen. Die entsprechenden Achsen stehen senkrecht zu einander und heißen ***Hauptträgheitsachsen***. Die zugehörigen axialen Trägheitsmomente heißen ***Hauptträgheitsmomente:***

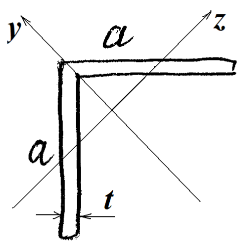
$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(I_y + I_z\right) \pm \sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\right].$$

Zwei Balken mit gleichen Hauptträgheitsmomenten haben identische elastische Eigenschaften. Ein Balken mit einem beliebigen Querschnitt kann daher immer äquivalent durch einen Balken mit einem symmetrischen Querschnitt ersetzt werden.

B1. Zu bestimmen sind die Trägheitsachsen und Trägheitsmomente des gezeigten dünnwandigen, rechtwinkligen Profils.



Lösung: Symmetrieachsen sind immer Hauptträgheitsachsen. Da dies eine symmetrische



Figur ist, bestimmen sich die Hauptachsen leicht. Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Leisten. Die Flächenträgheitsmomente sind:

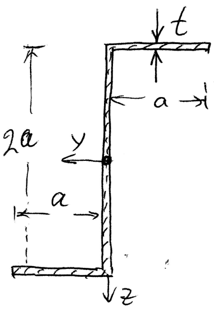
Bezüglich der z-Achse

$$I_z = I_1 = 2\frac{t\sqrt{2}\left(a/\sqrt{2}\right)^3}{12} = \frac{ta^3}{12}$$ und

bezüglich der y-Achse

$$I_y = I_2 = \frac{t\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)^3}{12} = \frac{ta^3}{3}.$$

B2. Zu bestimmen sind die Trägheitsachsen und Trägheitsmomente des gezeigten dünnwandigen Profils.



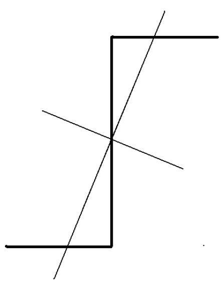
Lösung: Der Schwerpunkt liegt im Symmetriezentrum des Profils. Die Trägheitsmomente bezüglich der Achsen y und z sind:

$$I_y = \frac{t(2a)^3}{12} + 2taa^2 = \frac{8}{3}ta^3, \quad I_z = \frac{2}{3}ta^3,$$

$$I_{yz} = -\int yz\,dA = 2\int_{-a}^{0} aytdy = -ta^3.$$

Die Lage der Hauptträgheitsachsen wird durch den Winkel φ^* gegeben:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{-2ta^3}{\left(\frac{8}{3}ta^3 - \frac{2}{3}ta^3\right)} = -1$$



Daraus folgt $2\varphi^* = -45°$,

$\varphi^* = -22{,}5°$.

Die Hauptträgheitsmomente sind

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(I_y + I_z\right) \pm \sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{8}{3}ta^3 + \frac{2}{3}ta^3\right) \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}ta^3 - \frac{2}{3}ta^3\right)^2 + 4\left(ta^3\right)^2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}ta^3\left[\tfrac{10}{3} \pm \sqrt{2^2+4}\right] = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{2} = \begin{Bmatrix} 3{,}08 \\ 0{,}25 \end{Bmatrix} ta^3$$

Das größere Trägheitsmoment ist hier ca. 12 Mal größer als das kleinere.

IV. Transformation vom Hauptträgheitsachsensystem

Ist das ursprüngliche Bezugssystem das Hauptträgheitsachsensystem, so sehen die Transformationen wie folgt aus:

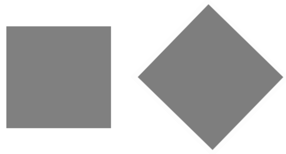
$$I_\eta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) + \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi$$

$$I_\zeta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) - \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = -\tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi.$$

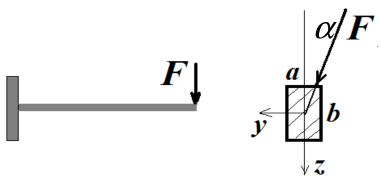
Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich, so hängen sie vom Winkel nicht ab, und das Deviationsmoment ist immer Null.

Beispiel: Balken mit den folgenden zwei Profilen haben gleiche Steifigkeit.



V. Schiefe Biegung

Ein links fest eingespannter Balken mit rechteckigem Querschnitt (Seiten a und b) wird am rechten Ende mit einer Kraft $\vec{F}$ unter dem Winkel α zur Vertikalen belastet. Zu bestimmen ist der Betrag und die Richtung der Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft.



Lösung: Kartesische Komponenten der Kraft $\vec{F} = (F_y, F_z)$ sind gleich $F_y = F\sin\alpha$, $F_z = F\cos\alpha$. Die Flächenträgheitsmomente sind gleich $I_y = \frac{ab^3}{12}$, $I_z = \frac{ba^3}{12}$. Gäbe es nur die vertikale Kraftkomponente, würde sich der Angriffspunkt um $w_z = \frac{F_z l^3}{3EI_y} = \frac{Fl^3\cos\alpha}{3EI_y}$ verschieben. Gebe es nur die horizontale Kraftkomponente, würde sich der Angriffspunkt um $w_y = \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3\sin\alpha}{3EI_z}$ verschieben. Bei Anwesenheit beider Kraftkomponenten ist der Verschiebungsvektor durch Superpositionsprinzip gegeben:

$$\vec{w} = \left(\frac{Fl^3\sin\alpha}{3EI_z}, \frac{Fl^3\cos\alpha}{3EI_y}\right) = \frac{4Fl^3}{Eab}\left(\frac{\sin\alpha}{a^2}, \frac{\cos\alpha}{b^2}\right)$$

Die Verschiebungslinie bildet mit der Vertikalen den Winkel θ: $\tan\theta = \frac{b^2}{a^2}\tan\alpha$.

Der Betrag der Verschiebung ist gleich

$$|\vec{w}| = \frac{4Fl^3}{Eab}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{a^4} + \frac{\cos^2\alpha}{b^4}}.$$