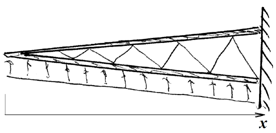
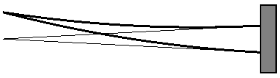
Balkenbiegung: Heterogene und zusammengesetzte Systeme. Steifigkeiten.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.5.3, 4.5.4**

I. Biegelinie eines Balkens mit veränderlicher Biegesteifigkeit

B1. Ein Flügel habe die unten gezeigte Konstruktion und sei mit einer konstanten Streckenlast belastet. Das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes kann als $I(x) = I_0 x^2 / l^2$ geschrieben werden. Die Biegedifferentialgleichung hat die Form $\left(EIw''(x)\right)'' = -q_0$. Ihre zweifache Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen $\left(EIw''(x)\right)'\Big|_{x=0} = 0$ und $EIw''(x)\Big|_{x=0} = 0$ ergibt





$EI_0\left(x/l\right)^2 w''(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2$ oder

$EI_0 w''(x) = -\frac{1}{2} q_0 l^2$.

Weitere zwei Integrationen ergeben

$EI_0 w'(x) = -\frac{1}{2} q_0 l^2 x + C_3$,

$EI_0 w(x) = -\frac{1}{4} q_0 l^2 x^2 + C_3 x + C_4$.

Aus den Randbedingungen $w(l) = 0$ und $w'(l) = 0$ folgt dann $C_3 = \frac{1}{2} q_0 l^3$, $C_4 = -\frac{1}{4} q_0 l^4$.

Die Biegelinie ist somit eine Parabel

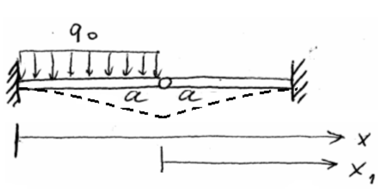
$w(x) = -\frac{q_0 l^2}{4EI_0}\left(x - l\right)^2$.

II. Übergangsbedingungen

In den folgenden Fällen ist es manchmal vorteilhaft, den Balken in mehrere Felder zu teilen und für jedes Feld eine eigene Integration durchzuführen:

- Es gibt Sprünge im Querschnitt,
- Im Verlauf des Balkens greifen einzelne (konzentrierte) Kräfte oder Momente an,
- Ein Balken ist aus mehreren Teilen zusammengesetzt, die gelenkig mit einander gekoppelt sind,
- ....

B2. Als Beispiel betrachten wir das unten abgebildete System bestehend aus zwei gelenkig gekoppelten Balken gleicher Biegesteifigkeit *EI*, deren andere Enden fest eingespannt sind. Wenn wir für jeden "ganzen" Balkenabschnitt eine eigene Koordinatenachse wählen (wobei $x_1 = x - a$ ist), so sind die allgemeinen Lösungen für jeden Abschnitt bereits bekannt. Für den linken Abschnitt gilt:



$EIw''' = -Q = q_0 x + C_1$,

$EIw'' = -M = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$,

$EIw' = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$,

$EIw = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

Für den rechten Abschnitt gilt:

$EIw''' = -Q = B_1$,

$EIw'' = -M = B_1\left(x - a\right) + B_2$,

$EIw' = \frac{1}{2} B_1\left(x - a\right)^2 + B_2\left(x - a\right) + B_3$,

$EIw = \frac{1}{6} B_1\left(x - a\right)^3 + \frac{1}{2} B_2\left(x - a\right)^2 + B_3\left(x - a\right) + B_4$

Aus den vier Randbedingungen: $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(2a) = 0$, $w'(2a) = 0$ und vier ***Übergangsbedingungen***: $w(a)_{links} = w(a)_{rechts}$, $EIw''(a)_{links} = 0$, $EIw''(a)_{rechts} = 0$, $EIw'''(a)_{links} = EIw'''(a)_{rechts}$ folgt dann

$C_1 = -\frac{13}{16} q_0 a$, $C_2 = \frac{5}{16} q_0 a^2$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$,

$B_1 = \frac{3}{16} q_0 a$, $B_2 = 0$, $B_3 = -\frac{3}{32} q_0 a^3$,

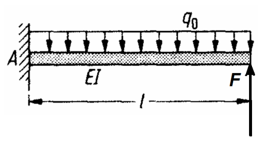
$B_4 = \frac{1}{16} q_0 a^4$.

Insbesondere für die Absenkung des Gelenkes ergibt sich $w(a) = \frac{q_0 a^4}{EI}\left(\frac{1}{24} - \frac{13}{6\cdot 16} + \frac{1}{2}\frac{5}{16}\right) = \frac{1}{16}\frac{q_0 a^4}{EI}$.

III. Superposition

Bei Problemen mehrerer Bereiche ist es oft einfacher das Superpositionsprinzip zu nutzen.

B3. Betrachten wir den neben stehend gezeigten Kragbalken. Zu bestimmen ist die Biegelinie.



<u>*Lösung:*</u> Die gegebene Belastung ist eine Superposition aus einer konstanten Streckenlast und einer Kraft $-F$. Die Biegelinien für die beiden Belastungen alleine sind bekannt:

Erste: $w_1(x) = \frac{q_0 x^2}{EI}\left(\frac{1}{24} x^2 - \frac{1}{6} lx + \frac{1}{4} l^2\right)$,

Zweite: $w_2(x) = -\frac{F}{EI}\left(-\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} lx^2\right)$.

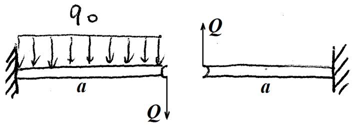
Bei der gesamten Belastung gilt das ***Superpositionsprinzip***: $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$.

Man kann z.B. eine Kraft wählen, bei der sich das rechte Ende nicht verschiebt:

$w(l) = \frac{1}{8}\frac{q_0 l^4}{EI} - \frac{Fl^3}{3EI} = 0$. Daraus ergibt sich

$F=\frac{3}{8}q_0 l$. Das ist das Ergebnis für die Lagerkraft im Beispiel 3 der vorigen Vorlesung.

Die Aufgabe aus Beispiel 2 kann man auch mit Hilfe des Superpositionsprinzips lösen. Ein Schnitt am Gelenk zeigt die in diesem Gelenk auf den linken und rechten Teil des Systems wirkenden Kräfte.



Die Absenkung des linken Balkens ist gleich

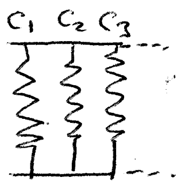
$w_-(a)=\frac{q_0a^4}{8EI}+\frac{Qa^3}{3EI}$, des rechten $w_+(a)=-\frac{Qa^3}{3EI}$.

Da die beiden gekoppelt und daher gleich sein müssen, folgt daraus $\frac{q_0a^4}{8EI}+\frac{Qa^3}{3EI}=-\frac{Qa^3}{3EI}$. Daraus bekommen wir die noch unbekannte Querkraft $Q=-\frac{3q_0a}{16}$. Die Absenkung des Gelenks ist somit gleich $w_+(a)=-\frac{q_0a^4}{16EI}$, was wir vorher durch direkte Integration und Übergangsbedingungen erhalten haben.

IV. Steifigkeiten

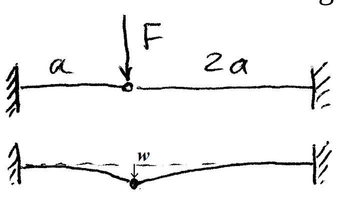
Ist bei einem zusammengesetzten System nur die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft von Interesse, so kann unter bestimmten Voraussetzungen die Benutzung des Begriffes Federsteifigkeit die Berechnungen sehr stark vereinfachen.

Verursacht eine Kraft F eine Verschiebung w des Angriffspunktes in ihrer Wirkungsrichtung, so gilt $F=cw$, wobei c - die *Federsteifigkeit* ist. Für einen Stab, der in Richtung seiner Achse belastet wird, gilt $c_{Stab}=\frac{EA}{l}$. Für einen Kragbalken der Länge *l*, der Am Ende mit der Querkraft *F* belastet wird, gilt



$c_{Blattfeder}=\frac{3EI}{l^3}$. Werden mehrere Federn mit Steifigkeiten c_1, c_2, ... parallel angeordnet, so summieren sich die Steifigkeiten: $c=c_1+c_2+\dots$.

B4. Betrachten wir das unten abgebildete System bestehend aus zwei gelenkig gekoppelten Balken gleicher Biegesteifigkeit *EI*, deren andere Enden fest eingespannt sind.



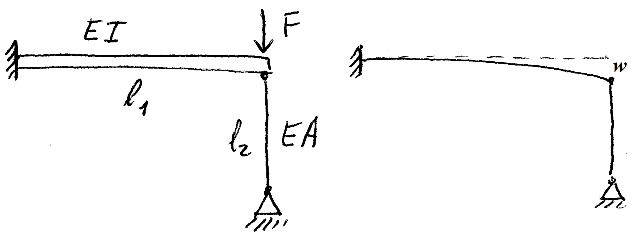
Zu bestimmen ist die Absenkung des Angriffspunktes der Kraft. Der erste Lösungsweg ist, die Balkendifferentialgleichung für beide Felder zu integrieren und die 8 Rand- und Übergangsbedingungen zu benutzen. Viel einfacher ist es aber zu bemerken, daß das gezeigte System zwei parallel angeordnete Blattfedern mit den Federsteifigkeiten $c_1=\frac{3EI}{a^3}$ und

$c_2=\frac{3EI}{(2a)^3}$ darstellt. Die Gleichgewichtsbedingung für das Gelenk lautet somit

$$F=F_1+F_2=c_1w+c_2w=\frac{27EI}{8a^3}w.$$

Für die Verschiebung erhalten wir $\boxed{w=\frac{8a^3F}{27EI}}$.

B5. Ein links fest eingespannter Balken ist rechts mit einem elastischen Pendelstab gestützt und mit einer Kraft F belastet. Zu bestimmen ist die Absenkung des Angriffspunktes der Kraft.



Lösung: Das System besteht aus einer parallel angeordneten Blattfeder mit der Steifigkeit $c_1=\frac{3EI}{l_1^3}$ und einem Stab mit der Steifigkeit $c_2=\frac{EA}{l_2}$. Die Gleichgewichtbedingung für den Knoten lautet

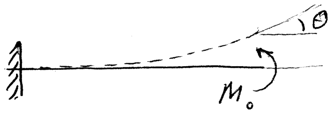
$$F=F_1+F_2=c_1w+c_2w=\left(\frac{3EI}{l_1^3}+\frac{EA}{l_2}\right)w.$$

Daraus folgt für die Absenkung

$$w=\frac{F}{\left(3EI/l_1^3+EA/l_2\right)}.$$

V. Drehsteifigkeit einer Blattfeder

Für die Biegelinie eines Balkens unter Wirkung eines Momentes M_0 haben wir



$$w(x)=-\frac{1}{2}\frac{M_0}{EI}x^2$$

berechnet. Das Verhältnis des Momentes zum Drehwinkel $|\theta(l)|\approx|w'(l)|=\frac{M_0}{EI}l$ ist die *Drehsteifigkeit* $k=EI/l$.