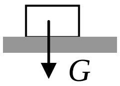
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 2.

Moment einer Kraft. Moment eines Kräftepaars. Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 3.1.1-3.1.4**

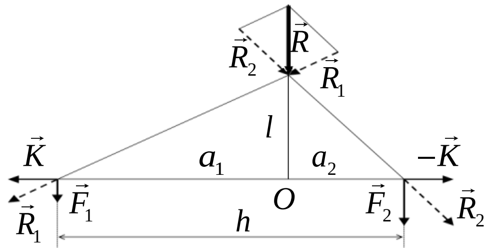
I. Das dritte Newtonsche Gesetz (actio=reactio)

Kraft und Gegenkraft sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie.



Wo ist hier die Gegenkraft?
(Antwort in der Vorlesung)

II. Resultierende für zwei parallele Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$



$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{K} + \vec{F}_2 - \vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

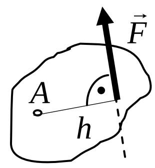
$$\frac{F_1}{K} = \frac{l}{a_1}, \quad \frac{F_2}{K} = \frac{l}{a_2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{F_1 a_1 = F_2 a_2} \qquad (1)$$

das *Hebelgesetz* von Archimedes.

III. Kraftmoment

Man kann das Hebelgesetz anders interpretieren, indem man den Begriff des *Kraftmomentes* einführt.

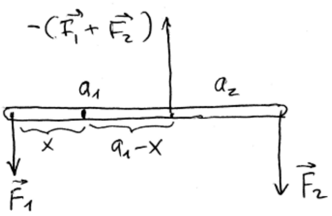


Das Moment einer Kraft in einer Ebene ist eine algebraische Größe, deren Betrag gleich $\boxed{\left|M^{(A)}\right| = hF}$ *ist.*

Es wird vereinbart, dass ein Moment positiv ist, wenn es gegen den Uhrzeigersinn dreht.

Das Hebelgesetz (1) bedeutet, dass im Gleichgewicht die *Summe aller Momente Null ist.*

Diese Bedingung hängt nicht von der Wahl des Bezugspunktes ab.



Beweis: Wählen wir einen Bezugspunkt im Abstand x vom linken Ende des Stabes.

Die Summe aller Momente ist gleich:

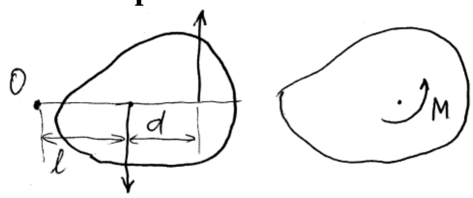
$$+F_1 x + (F_1 + F_2)(a_1 - x) - F_2(a_1 + a_2 - x)$$
$$= F_1 x + F_1 a_1 - F_1 x + F_2 a_1 - F_2 x - F_2 a_1 - F_2 a_2 + F_2 x$$
$$= F_1 a_1 - F_2 a_2 = 0$$

IV. Gleichgewichtsbedingungen in einer Ebene

Ein starrer Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte gleich Null und die Summe aller Kraftmomente gleich Null ist:

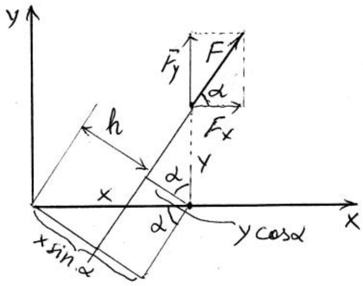
$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \textbf{und} \quad \sum M_i = 0 .}$$

V. Kräftepaar



$M^{(O)} = F(l + d) - Fl = Fd$ - hängt nicht von der Wahl des Bezugspunktes ab!

VI. Komponentendarstellung des Moments



Die Kraft $\vec{F}$ habe die kartesischen Komponenten F_x und F_y. Der Angriffspunkt der Kraft habe die Koordinaten x und y. Zu bestimmen ist das Kraftmoment.

Dem Bild kann man entnehmen, dass der Hebelarm $h = x\sin\alpha - y\cos\alpha$ mit $\sin\alpha = F_y / F$ und $\cos\alpha = F_x / F$ ist. Das Kraftmoment ist somit $\boxed{M = xF_y - yF_x} \Rightarrow$ Das Moment einer Kraft ist gleich der Summe der Momente ihrer Kraftkomponenten.

Vorteil der Komponentendarstellung: Sie ergibt immer "automatisch" sowohl den Betrag als auch das Vorzeichen (und somit den Drehsinn) des Momentes richtig.

VII. Gleichgewichtsbedingungen in Komponentendarstellung

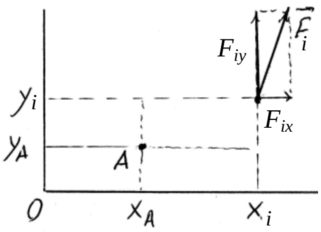
Kräftegleichgewicht:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; \sum F_{ix} = 0, \; \sum F_{iy} = 0 .$$

Momentengleichgewicht:

$$\sum M_i^{(O)} = 0 \;\Rightarrow\; \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right).$$

Die Bedingung für das Momentengleichgewicht hat nur Sinn, wenn sie *nicht* von der Wahl des Bezugspunktes abhängt. Beweis dazu: Wählen wir einen anderen Bezugspunkt A mit den Koordinaten x_A und y_A.



Die kartesischen Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft bezüglich des neuen Koordinatenursprungs sind $x_i - x_A$ und $y_i - y_A$. Das Moment bezüglich des neuen Bezugspunktes ist

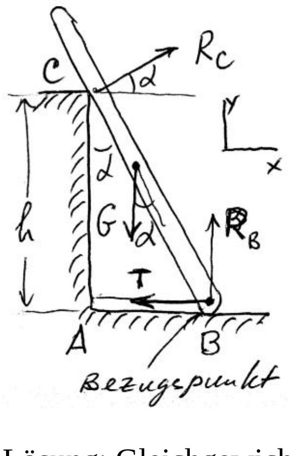
$$\sum M_i^{(A)} = \sum\left(\left(x_i - x_A\right)F_{iy} - \left(y_i - y_A\right)F_{ix}\right) =$$
$$= \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) - x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix} =$$
$$\sum M_i^{(O)} - x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix} = \sum M_i^{(O)}$$

VIII. Allgemeines Schema:

- Das System skizzieren
- Das interessierende Objekt freischneiden
- Alle eingeprägten Kräfte und Reaktionskräfte auftragen
- Gleichgewichtsbedingungen aufstellen
- Die Zahl der Unbekannten und der Gleichungen zählen
- Das Gleichungssystem lösen
- Lösung auswerten

IX. Beispiele

B1. Eine Leiter der Länge *l* stützt auf eine Wand der Höhe *h*. Der Winkel zur Wand ist α. Alles geschieht draußen bei Glatteis. Damit die Leiter nicht gleitet, wird sie von einem Seil gehalten. Zu bestimmen sind die Reaktionskräfte an der Wand, am Boden und die Zugkraft des Seils.



Lösung: Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\sum F_x: \quad R_C \cos\alpha + 0 + 0 - T = 0$$
$$\sum F_y: \quad R_C \sin\alpha - G + R_B + 0 = 0$$
$$\sum M^{(B)}: \quad G \sin\alpha \cdot \frac{l}{2} - R_C h / \cos\alpha = 0.$$

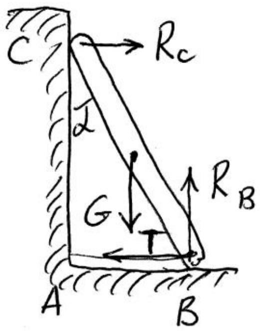
Aus der dritten Gleichung folgt

$$R_C = G\frac{l}{2h}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Einsetzen in die 1. und 2. Gleichungen ergibt:

$$T = R_C \cos\alpha = G\frac{l}{2h}\sin\alpha\cos^2\alpha,$$
$$R_B = G\left(1 - \frac{l}{2h}\sin^2\alpha\cos\alpha\right).$$

B2. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Leiter an eine vertikale Wand angelehnt ist?



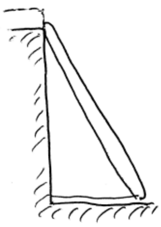
Lösung: Gleichgewichtsbedingungen:

$$R_C - T = 0$$
$$G - R_B = 0$$
$$G\frac{l}{2}\sin\alpha - R_C l\cos\alpha = 0$$

Daraus folgt

$$R_C = G\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{G}{2}\tan\alpha$$
$$T = R_C = \frac{G}{2}\tan\alpha, \quad R_B = G.$$

B3. Vergleichen Sie die Seilkraft in den zwei Fällen: Leiter draufliegend, Leiter angelehnt.



Lösung: Bemerken wir zunächst, dass im skizzierten Fall $h/l = \cos\alpha$ ist. Die Seilkraft kann daher in:

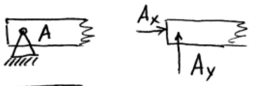
$$T = \frac{G}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

umgeschrieben werden.

Diese Kraft ist kleiner als im Fall "angelehnt":

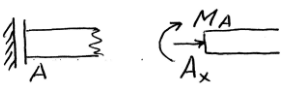
$$T_{draufliegend} = \frac{G}{2}\sin\alpha\cos\alpha < T_{angelehnt} = \frac{G}{2}\sin\alpha\frac{1}{\cos\alpha}$$

X. Arten der Lager

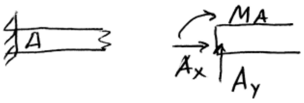


Festes Gelenklager, kein Moment

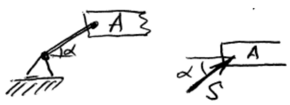
Verschiebliches Gelenklager, auch *Loslager*, kein Moment



Gleitführung



Einspannung



Nicht dehnbare Stange (oder Seil)