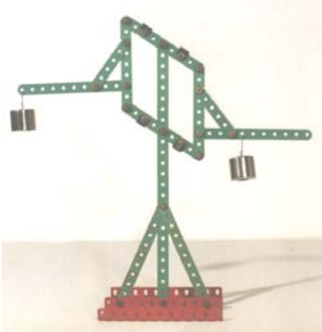
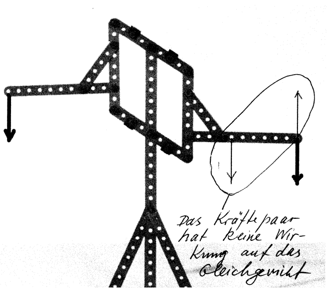
I. Roberval-Waage (erfunden vom französischen Mathematiker Roberval (1602-1675))

Diese Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn man gleich große Gewichte auf der einer oder der anderen Seite beliebig auf den Auslegern nach innen oder außen verschiebt. Der Trick besteht in der Art der Befestigung von den Auslegern, die immer horizontal bleiben. Das bedeutet, daß die Wirkung eines Kraftmomentes (Kräftepaars) an einem Ausleger keine Änderung des Gleichgewichts hervorruft. Andererseits kann man mit Hilfe des Momentes eine Kraft parallel zu ihrer Wirkungslinie verschieben, was mit der nebenstehenden Skizze illustriert wird.



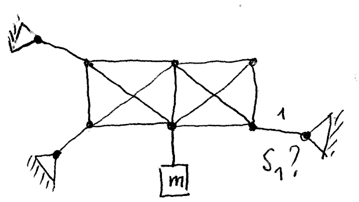


II. "Tricks"

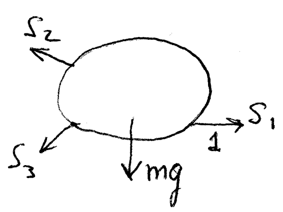
II. "Tricks" Beim Lösen von mechanischen Aufgaben ist es oft hilfsreich, sich die folgenden "Tricks" zu merken.

☺ Trick Nr. 1: "System als Ganzes".

Gegeben sei das folgende System und zu bestimmen die Stabkraft S_1. Ein reguläres Verfahren, wie etwa Knotenpunktverfahren führt hier zu keinem Erfolg: Das System ist statisch unbestimmt und es ist daher nicht möglich, alle Stabkräfte alleine aus den Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln.

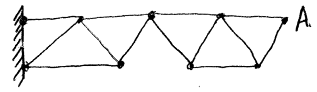


Selbst wenn das möglich wäre, wäre das ein unnötig großer Aufwand. In diesem Fall kann man aber leicht bemerken, daß das Fachwerk an sich ein starrer Körper ist (es ist dabei absolut egal, ob es statisch bestimmt oder unbestimmt ist), welches durch drei Pendelstäbe, d.h. statisch bestimmt, gestützt ist. Ein Freischnitt des Fachwerkes als Ganzes erlaubt, alle drei Stabkräfte aus den drei Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln, ohne etwas von den inneren Stabkräften im Fachwerk zu wissen.



☺ Trick Nr. 2: "Ganze Teile"

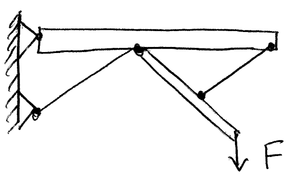
Das folgende System soll um ein Lager in A ergänzt werden, so daß das System statisch bestimmt gelagert ist.



<u>Lösung:</u> Offenbar besteht das Fachwerk aus zwei Teilen: Den linke Teil kann man als einen Teil der starren wand betrachten. Der rechte teil ist ein starrer Körper, der and die "Wand" zweiwertig gekoppelt ist. Zur statisch bestimmten Lagerung muß der rechte teil daher in A mit einem einwertigen Lager gelagert werden, z.B. mit einem Pendelstab.

III. Wichtige Unterscheidung: Ideales Fachwerk oder nicht?

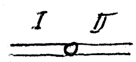
Bei Stabwerken macht man oft den Fehler, daß man die Methoden, die für "ideale Fachwerke" entwickelt wurden, auch für Stabwerke anwendet, die keine idealen Fachwerke sind.
Das wichtigste Merkmal eines *idealen Fachwerkes* ist, daß es aus Stäben besteht, auf welche nur Kräfte **an deren Enden** wirken, **wo sie gelenkig verbunden sind**. Im Verlauf des Stabes darf keine Kraft wirken, insbesondere: (a) keine Schwerkraft, (b) keine eingeprägten Kräfte, (c) keine Reaktionskräfte (d.h. es darf auch keine Verbindungen mit anderen Elementen innerhalb des Stabes geben). Nur unter diesen Voraussetzungen sind die Stabkräfte entlang der Stabachse gerichtet. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so kann die Stabkraft eine beliebige Richtung haben.
Beispiel: Wie bestimmt man am besten die Stabkräfte im nebenstehend gezeigten Stabwerk - mit Knotenschnitt oder Ritterschnitt?



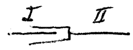
<u>Lösung:</u> Keines von beiden, denn die genannten Methoden werden an ideale Fachwerke angewandt. Das vorliegende System ist aber kein ideales Fachwerk, z.B. weil zwei der Stäbe Gelenke innerhalb ihrer Länge haben. In diesem Fall müssen alle Stäbe freigeschnitten werden und die

Gleichgewichtesbedingungen unter Berücksichtigung von allen Reaktionskräften aufgestellt werden.

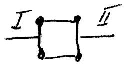
IV. Übergangsbedingungen
Bei Integration von Schnittlastendifferentialgleichungen werden zur Bestimmung von Integrationskonstanten Randbedingungen benutzt. Liegt ein zusammengesetztes System vor (z.B. bestehend aus mehreren Stäben), so müssen auch die Randbedingungen an den Übergängen von einem Teilsystem zum anderen berücksichtigt werden. Diese Bedingungen nennt man *Übergangsbedingungen.* Da wir diese in den vorigen Vorlesungen nicht besprochen haben, hier eine kurze Darstellung von typischen Übergangsbedingungen. Im Verbindungspunkt gelten folgende Zusammenhänge:



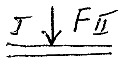
$M^{(I)} = M^{(II)} = 0$



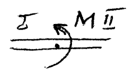
$N^{(I)} = N^{(II)} = 0$



$Q^{(I)} = Q^{(II)} = 0$

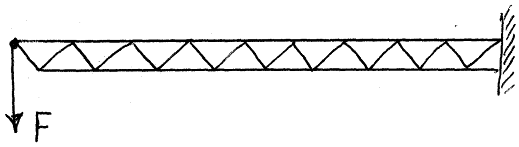


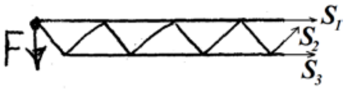
$Q^{(II)} = Q^{(I)} - F$



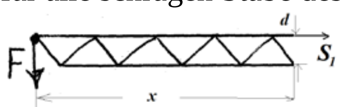
$M^{(II)} = M^{(I)} - M$

VI. Strukturen verstehen
Man kann ein qualitatives Verständnis von Strukturen entwickeln, welches erlaubt, sie schnell und verläßlich zu berechnen oder zu entwickeln.
Beispiel 1: Schlankes Fachwerk



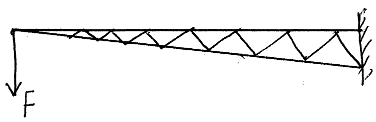


Ein erster vertikaler Schnitt durch drei beliebige Stäbe und das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung ergibt: $S_2 = \sqrt{2}F$. Das gilt offenbar für alle schrägen Stäbe des Fachwerkes.



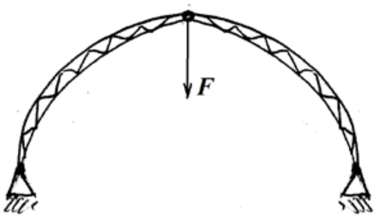
Ein zweiter vertikaler Schnitt durch einen Knoten und Anwendung des Momentengleichgewichtes bezüglich des Knotens ergibt $S_1 = F\dfrac{x}{d}$. Bei einem schlangen Fachwerk gilt für den größten Teil des Fachwerkes $x >> d$, somit ist die Zugkraft in der oberen Reihe von horizontalen Stäben viel größer, als die Stabkräfte in den schräg gelagerten Stäben. Dasselbe gilt für die untere Reihe von horizontalen Stäben, nur sind sie auf Druck beansprucht. Das bedeutet, daß in einem schlanken Fachwerk am stärksten die horizontal gerichteten Stäbe belastet sind. Sie geben auch den größten Beitrag zum Schnittmoment, das in jedem "Knotenschnitt" einfach gleich der Stabkraft mal die Dicke des Fachwerkes ist.

Verlauf des Momentes und Form des Trägers:
Soll man ein Fachwerk aus Stäben gleicher Stärke aufbauen, so bedeutet das, daß die längs laufenden Stabkräfte alle in etwa gleich sein sollen. Die Dicke des Fachwerkes soll daher proportional zum Schnittmoment sein. Im oben gezeigten Beispiel eines Tragwerkes, welches eine konzentrierte Kraft an seinem Ende tragen soll, sollte die Dicke des Fachwerkes proportional zum Abstand von dem Angriffspunkt der Kraft sein.

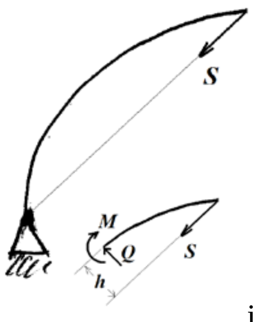


Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Fall alle schrägen Verbindungsstäbe sogar Nullstäbe sind und nur für Stabilität des Trägers sorgen, während alle Stabkräfte in der oberen und unteren Stabreihe jeweils gleich sind.

Verlauf des Momentes in Bögen eines Dreigelenkbogens:
Zu bestimmen ist die optimale Form (Breite) von Bögen eines Dreigelenkbogens.



Lösung: Ein Schnitt in der Nähe des Gelenkes zeigt,



daß die Schnittkraft in Richtung des zweiten (unteren) Gelenkes gerichtet ist. Ein weiterer Schnitt an einer beliebigen Stelle des Bogens führt zum Momentengleichgewicht: $M = -Sh$. Das Moment ist somit einfach Proportional zur Höhe des Bogens von der Verbindungslinie zwischen beiden Lagern. Nach unseren vorherigen heuristischen Überlegungen muß die Dicke des Trägers (konzipiert als Fachwerk) auch proportional zu dieser Höhe sein.