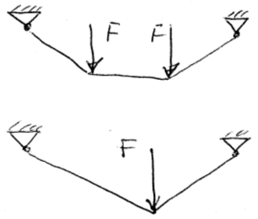
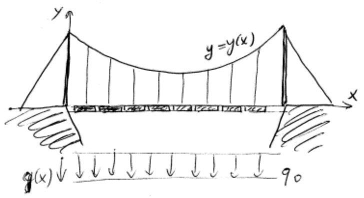
I. Seile und Ketten

Neben starren Körpern werden als Lastaufnehmende Elemente oft auch Seile oder Ketten benutzt. Ein ideales Seil kann keinen Querkräften oder Biegemomenten widerstehen (Q=0, M=0). Die Schnittkräfte sind daher stets entlang der Biegelinie des Seils gerichtet. Ketten kann man als eine Reihe von starren Stäben betrachten, die mit einander gelenkig verbunden sind. Die auf die Kette wirkenden Kräfte verteilen wir auf die benachbarten Knoten. Wie in einem idealen Fachwerk, wirken dann alle Stabkräfte in der Kette in der Richtung der Stabachse.

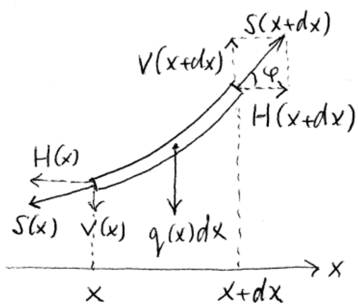


Trägt ein Seil vernachlässigbaren Gewichts mehrere Einzelkräfte, nimmt es die Form mehrerer geradliniger Stücke an.

II. Seil unter Wirkung einer Streckenlast



Greifen am Seil mehrere parallel gerichtete Kräfte, kann man es annähernd als kontinuierlich mit einer Streckenlast $q(x) = dF/dx$ belastet ansehen.



Betrachten wir ein infinitesimal kleines Element des Seils zwischen x und $x+dx$. Die Spannkraft des Seils am rechten Ende des Elements bezeichnen wir mit $S(x+dx)$, am linken Ende $S(x)$. Beide sind tangential zur Hängelinie des Seils gerichtet. Kräftegleichgewicht:

x: $H(x+dx) - H(x) = 0$,

y: $V(x+dx) - V(x) - q(x)dx = 0$.

Aus der ersten Gleichung folgt $H(x) = konst$, die wir als H bezeichnen: $H(x) = H$.

Die zweite Gleichung ergibt

$\dfrac{V(x+dx) - V(x)}{dx} = q(x)$ oder

$$\frac{dV(x)}{dx} = q(x)\,. \qquad (1)$$

Das Momentengleichgewicht haben wir bereits früher benutzt. Aus ihm folgt, daß die Seilkräfte in der Seilrichtung wirken oder mathematisch ausgedrückt: $\dfrac{V(x)}{H(x)} = \tan\varphi = \dfrac{dy}{dx}$.

Daraus folgt $V(x) = H(x)\dfrac{dy}{dx} = H\dfrac{dy}{dx}$. (2)

Indem wir die Gleichung (2) in (1) einsetzen, erhalten wir $H\dfrac{d^2y}{dx^2} = q(x)$ oder

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q(x)}{H}} \text{ oder auch } \boxed{y'' = \frac{q(x)}{H}}. \qquad (3)$$

Berechnen wir die Form des Seils bei einer konstanten Streckenlast $q(x) = q_0$, wie es annähernd bei einer Hängebrücke der Fall ist, gilt: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{q_0}{H}$. Die erste Integration ergibt

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{q_0}{H}dx + C_1 = \frac{q_0}{H}x + C_1.$$

Die zweite Integration ergibt

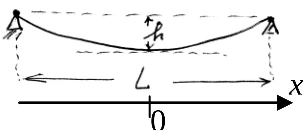
$$y = \int\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right)dx + C_2$$

$$= \int \frac{q_0}{H}xdx + \int C_1dx + C_2.$$

$$= \frac{q_0}{H}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \qquad (4)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus zusätzlichen geometrischen und anderen Bedingungen bestimmt.

B1. Gegeben seien die Länge der Hängebrücke *L* und der Durchhang *h.* Zu bestimmen ist die Form des Seils und die maximale Seilkraft.



<u>*Lösung:*</u> Zählen wir die Koordinate *x* von der Mitte der Brücke und *y* vom tiefsten Durchhangpunkt. Dann gilt: $y(0) = 0$, $y(-L/2) = h$ und $y(L/2) = h$. Einsetzen $x = 0$ in (4) ergibt $C_2 = 0$. Einsetzen $x = \pm L/2$ in (4) ergibt

$$y(-L/2) = \frac{q_0}{H}\frac{L^2}{8} - C_1\frac{L}{2} = h,$$

$$y(L/2) = \frac{q_0}{H}\frac{L^2}{8} + C_1\frac{L}{2} = h\,.$$

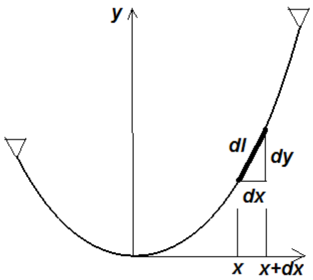
Daraus folgt $C_1 = 0$ und $h = \frac{q_0}{H}\frac{L^2}{8}$. Die Form des Seils berechnet sich somit zu $y = \frac{4hx^2}{L^2}$. Horizontale Komponente der Seilkraft ist konstant und gleich $H = \frac{q_0}{h}\frac{L^2}{8}$. Die Seilkraft berechnen wir gemäß

$$S = H\sqrt{1+y'^2} = \frac{q_0}{h}\frac{L^2}{8}\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}.$$

Sie erreicht ein Maximum in den Punkten

$$x = \pm L/2: \quad \boxed{S_{\max} = \frac{q_0}{h}\frac{L^2}{8}\sqrt{1+\left(\frac{4h}{L}\right)^2}}.$$

III. Seil unter Eigengewicht



Gegeben sei ein Seil mit konstanter linearer Massendichte $dm/dl = \lambda$. Schneiden wir ein infinitesimal kleines Element des Seils zwischen den Koordinaten x und $x+dx$ frei. Auf dieses Element wirkt die Schwerekraft $dF = dm \cdot g = \lambda dl \cdot g \equiv q_0 dl$, wobei wir die Bezeichnung $q_0 = \lambda g$ eingeführt haben. Bezogen auf das Intervall dx ergibt das die *Streckenlast* $q(x)$, die auf das Seil wirkt:

$$q(x) = \frac{dF}{dx} = q_0\frac{dl}{dx}.$$

Nach dem Pythagoras-Satz gilt

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Für die Streckenlast erhalten wir somit

$$q(x) = q_0\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Einsetzen in Gleichung (3) ergibt

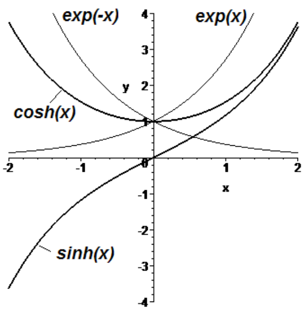
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \qquad (5)$$

Die Form des Seils ergibt sich aus der Lösung dieser nicht linearen Differentialgleichung mit gegebenen geometrischen Randbedingungen.

IV. Ein bißchen Mathematik: Exponentialfunktion und hyperbolische Funktionen

Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus werden definiert als

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Ihre geometrische Darstellung sehen Sie im nebenstehenden Bild.

Die so definierten Funktionen haben folgende Eigenschaften:

$(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Warum heißen diese Funktionen Sinus und Kosinus und warum Hyperbolicus?

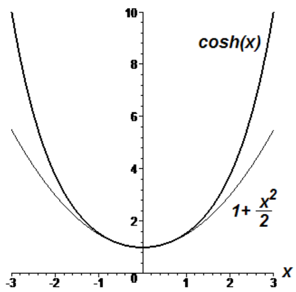
Hyperbolicus: Die normalen Sinus und Kosinus-Funktionen werden auch Kreisfunktionen genannt. Die Gleichungen $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ definieren in parametrischer Form einen Kreis mit dem Radius $r = 1$. Das sieht man daran, daß $x^2 + y^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ eine Kreisgleichung darstellt.

Die Gleichungen $x = \cosh\varphi$, $y = \sinh\varphi$ definieren in parametrischer Form eine *Hyperbel*. Das sieht man daran, daß $x^2 - y^2 = 1$ eine Hyperbelgleichung darstellt. Daher stammt der Name Hyperbolicus.

Sinus und *Kosinus:* Die sogenannte Eulersche Formel für imaginäre Exponente lautet: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist. Daraus folgt $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Summieren beider Gleichungen ergibt $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \cosh(i\varphi)$, $i\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2} = \sinh(i\varphi)$.

Umgekehrt gilt $\cos i\varphi = \cosh\varphi$ und $\sin i\varphi = i\sinh(\varphi)$.

Dieser Zusammenhang von hyperbolischen und Kreisfunktionen erklärt die Namen Sinus und Kosinus in beiden Fällen.



Auf dem nebenstehenden Bild können Sie den Verlauf einer Parabel und einer Kosinus Hyperbolicus-Kurve vergleichen.