Aufgabe 1

(a)

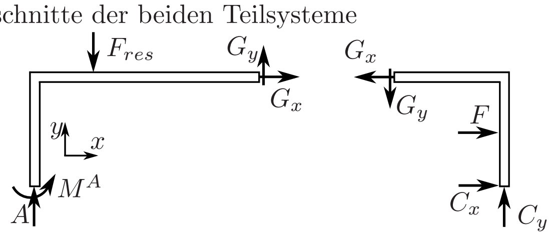
$$q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$F_{res} = \int_0^l q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{2q_0 l}{\pi}}}$$

$$\underline{\underline{x_{res} = \frac{1}{2}l}}$$

(b)

Freischnitte der beiden Teilsysteme



GGBen-I:

$$x : 0 = G_x \;\Rightarrow \underline{\underline{G_x = 0}} \tag{1}$$

$$y : 0 = A - F_{res} + G_y \tag{2}$$

$$M^G : 0 = -A2l + F_{res}\frac{3}{2}l + M^A \tag{3}$$

GGBen-II:

$$x : 0 = -G_x + C_x + F \;\Rightarrow \underline{\underline{C_x = -\frac{q_0 l}{\pi}}} \tag{4}$$

$$M^G : 0 = C_x l + C_y l + F\frac{1}{2}l \;\Rightarrow \underline{\underline{C_y = \frac{q_0 l}{2\pi}}} \tag{5}$$

$$y : 0 = C_y - G_y \Rightarrow \underline{\underline{G_y = \frac{q_0 l}{2\pi}}} \tag{6}$$

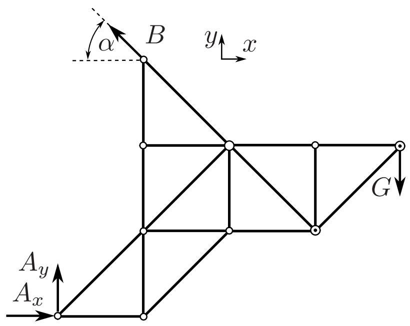
Aus (2) mit G_y ergibt sich:

$$A = F_{res} - G_y \;\Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{3q_0 l}{2\pi}}} \tag{7}$$

Dies in (3) eingesetzt ergibt dann:

$$M^A = A2l - F_{res}\frac{3}{2}l \;\Rightarrow \underline{\underline{M^A = 0}} \tag{8}$$

(c)



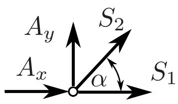
GGBen:

$$M^A : 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}B3a + \frac{\sqrt{2}}{2}Ba - G4a \qquad \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{2}{\sqrt{2}}G}}$$

$$x : 0 = A_x - \frac{\sqrt{2}}{2}B \qquad \Rightarrow \underline{\underline{A_x = G}}$$

$$y : 0 = A_y + \frac{\sqrt{2}}{2}B - G \qquad \Rightarrow \underline{\underline{A_y = 0}}$$

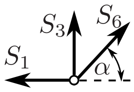
(d)



$$y : 0 = A_y + \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{S_2 = 0}}$$

$$x : 0 = A_x + S_1$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{S_1 = -G}}\;(D)$$



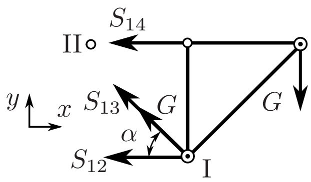
$$x : 0 = -S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_6$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{S_6 = \frac{-2}{\sqrt{2}}G}}\;(D)$$

$$y : 0 = S_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_6$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{S_3 = G}}\;(Z)$$

(e)



$$M^{II} : 0 = -S_{12}a - G2a \qquad \Rightarrow \underline{\underline{S_{12} = -2G}}$$

$$M^{I} : 0 = S_{14}a - Ga \qquad \Rightarrow \underline{\underline{S_{14} = G}}$$

$$y : 0 = -G + \frac{\sqrt{2}}{2}G + \frac{\sqrt{2}}{2}S_{13} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{S_{13} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right)G}}$$

Aufgabe 2

(a)

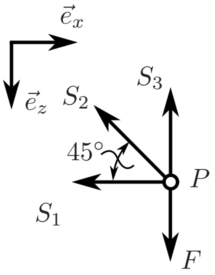
- $2k = r + s \;\Rightarrow\; 2\cdot 10 = 3 + 17$ ✓
- nicht verschieblich oder vorspannbar ✓

(b) $5, 4, \quad 9, 15$

Aufgabe 3

(a)

Freischnitt:



GGBen:

$$x: 0 = -S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 \tag{9}$$

$$\Rightarrow S_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2 \tag{10}$$

$$z: 0 = -S_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + F \tag{11}$$

$$\Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + F \tag{12}$$

(b)

$$\varepsilon = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma}{E} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta l_1}{l_1} = \alpha_T \Delta T + \frac{S_1}{EA} \tag{14}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA} \tag{16}$$

(c)

$$\Delta l_1 = 0 \tag{17}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_y \tag{18}$$

$$\Delta l_3 = u_y \tag{19}$$

Einsetzen der Gleichungen (15), (16) ergibt zunächst:

$$S_3 = 2S_2 \tag{20}$$

Mit den Gleichungen (10), (12) sind die gesuchten Kräfte:

$$\underline{\underline{S_1 = \frac{-2F}{2 + 4\sqrt{2}}}} \tag{21}$$

$$\underline{\underline{S_2 = \frac{2F}{4 + \sqrt{2}}}} \tag{22}$$

$$\underline{\underline{S_3 = \frac{4F}{4 + \sqrt{2}}}} \tag{23}$$

(d)

Einsetzen von (21) in (14) und Umstellen führt auf die gesuchte Temperaturänderung:

$$\underline{\underline{\Delta T = \frac{2F}{\alpha_T EA \left(2 + 4\sqrt{2}\right)} = \frac{F}{\alpha_T EA \left(1 + 2\sqrt{2}\right)}}} \tag{24}$$

Der Stab 1 wird also erwärmt!

Aufgabe 4

(a)

Rechteck als 1 und Dreieck als 2 nummeriert:

i	z_i	A_i	$z_i A_i$
1	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	$3a^3$
2	$2a$	$3a^2$	$6a^3$
$\sum$	–	$9a^2$	$9a^3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{z}_S = \frac{9a^3}{9a^2} = a}}$$

(b)

i	z_{Si}	$z_{Si}^2 A_i$	$I_{\tilde{y}\tilde{y}i}$
1	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{2}a^4$	$\frac{1}{2}a^4$
2	a	$3a^4$	$\frac{3}{2}a^4$
$\sum$	–	$\frac{9}{2}a^4$	$2a^4$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I_{yy} = \frac{9}{2}a^4 + 2a^4 = \frac{13}{2}a^4}}$$

(c)

$$EIw'''' = q_0 \tag{25}$$

$$EIw''' = q_0 x + C_1 \tag{26}$$

$$EIw'' = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \tag{27}$$

$$EIw' = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \tag{28}$$

$$EIw = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \tag{29}$$

RBen und Auflösen:

$$w(x=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \tag{30}$$

$$w'(x=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \tag{31}$$

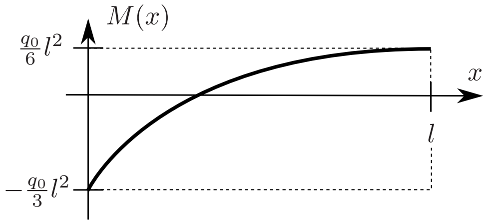
$$EIw'''(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = -q_0 l \tag{32}$$

$$w'(x=l) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} q_0 l^2 \tag{33}$$

Damit lautet das Biegemoment:

$$\underline{\underline{M(x) = q_0 l^2 \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{3} \right)}}$$

(d)



(e)

Die Biegenormalspannung ist hier gerade:

$$\sigma(x,z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

und maximal an den Randfasern $z^{o/u} = (-a, 3a)$. Mit $M(x)$ erkennt man, dass die maximale Druckspannung bei $(x_m, z_m) = (0, 3a)$ liegt:

$$\sigma^D_{max} = \sigma(0, 3a)$$

$$\underline{\underline{\sigma^D_{max} = \frac{-\frac{1}{3}q_0 l^2}{6a^4} 3a = \frac{-q_0 l^2}{6a^3}}}$$

Damit die maximale Druckspannung nicht überschritten wird, muss gelten:

$$\left|\sigma^D_{max}\right| \le \sigma_0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{q_0 \le \frac{6a^3}{l^2}\sigma_0}}$$

Aufgabe 5

(a)

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(b)

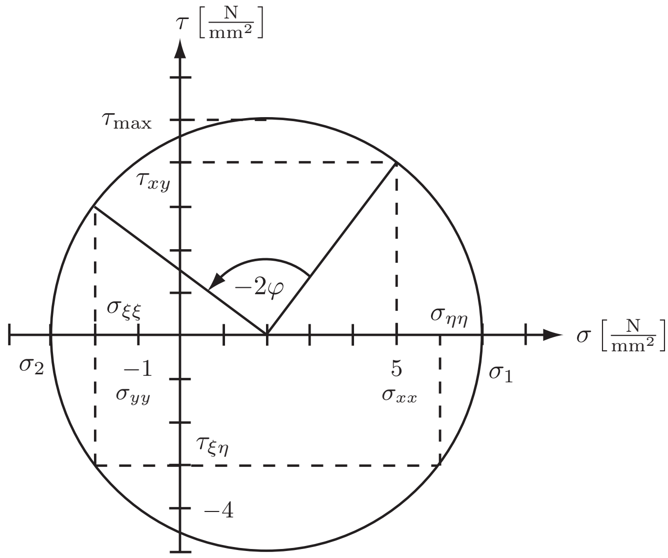
$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \left(\frac{5-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5+1}{2}\right)^2 + 16}\right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= \left(2 \pm \sqrt{9+16}\right) = (2 \pm 5) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{\sigma_1 = 7\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}, \quad \underline{\underline{\sigma_2 = -3\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} \end{aligned}$$

(c)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\underline{\underline{\tau_{\max} = 5\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

(d)



(e)

$$\underline{\underline{\sigma_{\xi\xi} = -2\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}, \ \underline{\underline{\tau_{\xi\eta} = 3\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}, \ \underline{\underline{\sigma_{\eta\eta} = 6\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

Aufgabe 6

(a)

$$M_T = GI_p\Theta' = GI_p\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} \tag{34}$$

(b)

$$h = a\sin\left(\Theta\left(x=l\right)\right) \Rightarrow \Theta\left(l\right) \approx \frac{h}{a} \tag{35}$$

(c)

Integration von (34) mit $M_T = M_b$:

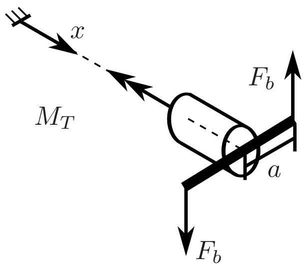
$$\Theta\left(x\right) = \frac{M_b}{GI_p}x + C \text{ und } \Theta\left(0\right) = 0, \tag{36}$$

$$\Rightarrow \Theta\left(x\right) = \frac{M_b}{GI_p}x. \tag{37}$$

Einsetzen von (35) und Umstellen ergibt:

$$\underline{\underline{M_b = GI_p\frac{h}{al}}} \tag{38}$$

Fehlt noch die Kraft F_b. Freischnitt:



und GGBen ergeben:

$$M_x : 0 = -M_T + 2F_b a \tag{39}$$

$$F_b = \frac{1}{2a}M_T \tag{40}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_b = \frac{1}{2}GI_p\frac{h}{a^2 l}}} \tag{41}$$

Aufgabe 7

(a)

Die Kraft aus der Temperaturerhöhung:

$$\varepsilon = \alpha_T\Delta T + \frac{N}{EA} \overset{!}{=} 0$$
$$F = -N = EA\alpha_T\Delta T$$

(b)

Eulersche Differentialgleichung fürs Knicken:

$$w'''' + \lambda^2 w'' = 0 \text{ mit } \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$
$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D$$

(c)

Die Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \tag{42}$$
$$w'(0) = 0 \tag{43}$$
$$w'(l) = 0 \tag{44}$$
$$Q(l) = 0 = -EIw'''(l) = 0 \tag{45}$$

Die notwendigen Ableitungen aufstellen:

$$w'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda \tag{46}$$
$$w''(x) = -A\lambda^2\cos\lambda x - B\lambda^2\sin\lambda x \tag{47}$$
$$w'''(x) = A\lambda^3\sin\lambda x - B\lambda^3\cos\lambda x \tag{48}$$

und die RBen einsetzen:

$$(42) : A + D = 0 \Rightarrow D = -A$$
$$(43) : B + C = 0 \Rightarrow C = -B$$
$$(44) : -A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C = 0$$
$$(45) : A\sin\lambda l - B\cos\lambda l = 0$$

führt auf:

$$\begin{bmatrix} -\sin\lambda l & \cos\lambda l - 1 \\ \sin\lambda l & -\cos\lambda l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forderung nach nichttrivialer Lösung ergibt:

$$\sin\lambda l = 0$$

Die kritische Kraft ergibt sich aus dem kleinsten $\lambda \neq 0$:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l} \Rightarrow \underline{\underline{F_{krit} = EI\lambda_1^2 = \pi^2\frac{EI}{l^2}}}$$