Klausur - Statik und elementare Festigkeitslehre - WiSe 2014/15

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser umrahmte Bereich ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

Nachname	____________________	Vorname	____________________
Studiengang	____________________	Matrikelnummer	____________________
Art der Klausur:		◯ Prüfungsklausur	◯ Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ 1 - 7	Kurzfragenteil	Sichtung
Punkte								/ 80	/ 20	

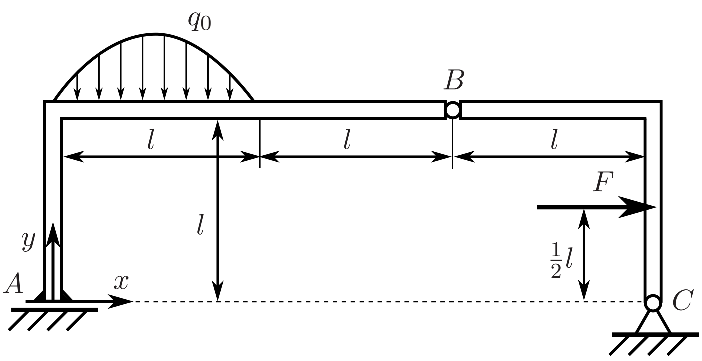
Die Klausur umfasst sieben Rechenaufgaben und einen Kurzfragenteil. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 40 von 100 Punkten erreicht werden, jedoch muss dabei der Kurzfragenteil mit mindestens 10 von 20 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des Kurzfragenteils **direkt auf dem Klausurblatt** ein (**nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!**). Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet.

1 Auflagerreaktionen — 3+8 = 11 Punkte

Das gezeigte System besteht aus zwei im Punkt B gelenkig miteinander verbundenen *starren* Trägern. Zur Kopplung an die Umgebung dienen die Parellelführung in A und ein Festlager in C. Das Tragwerk wird durch eine vertikal gerichtete, sinusförmig verlaufende Streckenlast mit dem Maximalwert q_0 und eine horizontal wirkende Einzelkraft F belastet.

(a) Geben Sie den Betrag und die x-Koordinate des Kraftangriffspunktes der Resultierenden der Streckenlast an.

(b) Bestimmen Sie alle Auflagerreaktionen sowie die Gelenkkräfte in B. Fertigen Sie hierfür zunächst alle notwendigen Freischnitte an.



Gegeben: q_0, l, $F = \frac{q_0 l}{\pi}$

2 Fachwerk 1+2+4+7+4 = 18 Punkte

Das gezeigte ideale Fachwerk besteht aus 17 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Es ist im Punkt A durch ein Festlager und im Punkt B durch eine Pendelstütze gelagert. Im Knoten C ist ein undehnbares Seil befestigt, welches über reibungsfreie Umlenkrollen geführt wird und mit der Gewichtskraft G belastet ist. Der Radius der Umlenkrollen ist zu vernachlässigen.

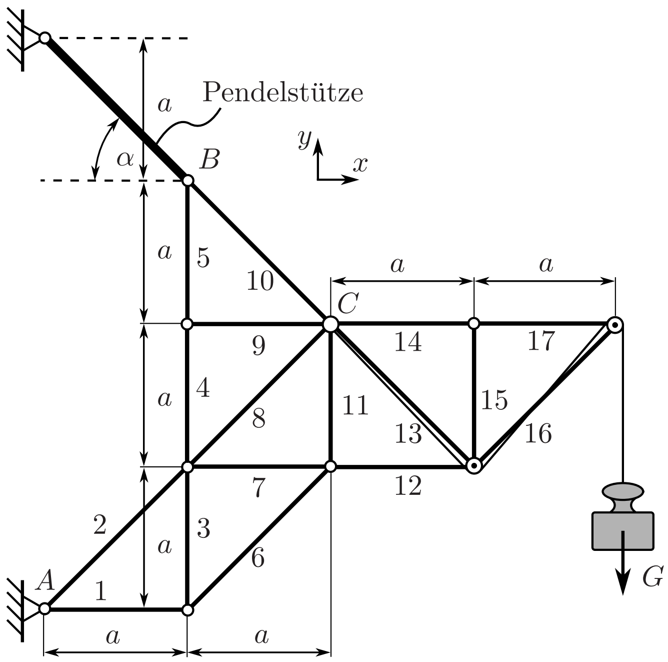
(a) Prüfen Sie die *notwendige* und die *hinreichende* Bedingung für statische Bestimmtheit.

(b) Identifizieren Sie alle offensichtlichen Nullstäbe (Falsche Nullstäbe führen zu Punktabzug in Teilaufgabe (b)).

(c) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und die Kraft in der Pendelstütze bei B.

(d) Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben 1, 2, 3 und 6 mit dem Knotenschnittverfahren. Geben Sie an, ob diese auf *Zug* oder *Druck* beansprucht werden.

(e) Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben 12, 13 und 14 mit dem RITTERschen Schnittverfahren.



Gegeben: G, a, $\alpha = 45°$

3 Stabsystem 3+2+6+1 = 12 Punkte

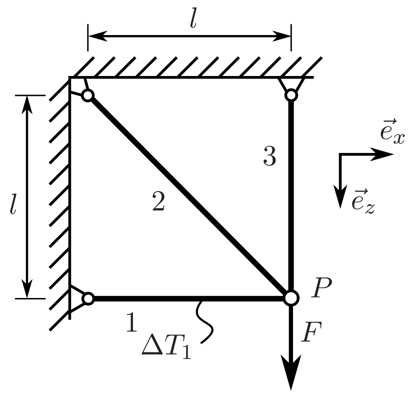
Das abgebildete Stabwerk besteht aus drei gewichtslosen, elastischen Stäben, die im Knoten P gelenkig verbunden sind. Das E-Modul E, die Querschnittsfläche A und der Temperatur-Dehnungskoeffizient α_T sind für alle Stäbe identisch. Das System wird zunächst spannungsfrei eingebaut und anschließend durch eine vertikal gerichtete Kraft F belastet. Zusätzlich wird die Temperatur des Stabes 1 so eingestellt, dass die Belastung seine Länge *nicht* ändert.

(a) Fertigen Sie einen Freischnitt des Knotens P an und stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen auf.

(b) Geben Sie die Material-Strukturgleichungen für die 3 Stäbe an.

(c) Bestimmen Sie die Kräfte in den 3 Stäben. Beachten Sie, dass die Längenänderung Δl_1 des Stabes 1 gerade Null sein soll.

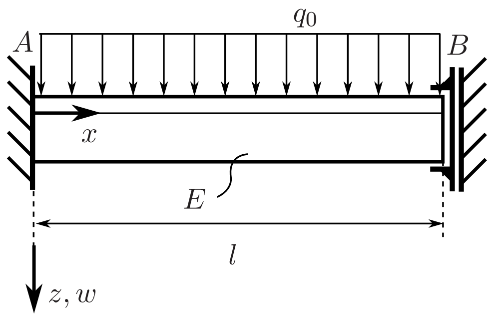
(d) Bestimmen Sie die Temperaturänderung ΔT_1 des Stabes 1. Wird der Stab erwärmt oder abgekühlt?



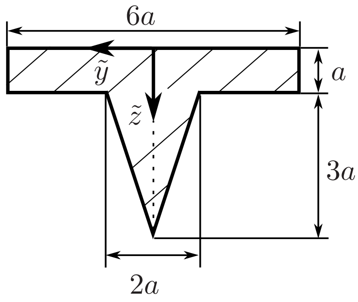
Gegeben: EA, l, F, α_T

4 FTM, Biegespannung 4+4+5+1+4 = 18 Punkte

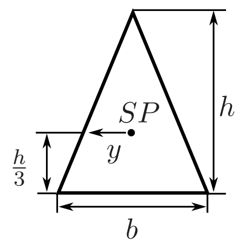
Der skizzierte, längshomogene Balken ist im Punkt A fest eingespannt und im Punkt B durch eine Parallelführung gelagert. Er ist durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Das Querschnittsprofil des Balkens besitzt die unten dargestellte, symmetrische Form und ist über die gesamte Länge l konstant. Zur Auslegung des Bauteils sind die unten aufgeführten Teilaufgaben zu bearbeiten.



Querschnitt:



Hinweis:



$I_{yy}^{SP} = \frac{bh^3}{36}$

(a) Bestimmen Sie die Flächenschwerpunktskoordinate $\tilde{z}_s$ im eingezeichneten $\tilde{y}, \tilde{z}$-Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment I_{yy} bezüglich des Flächenschwerpunktes.

(c) Berechnen Sie das Biegemoment $M(x)$ mit Hilfe der Biegelinien-Differentialgleichung.

(d) Skizzieren Sie den Verlauf von $M(x)$ über x mit Angabe charakteristischer Werte.

Bitte beachten: Verwenden Sie im Folgenden die Näherungen $\tilde{z}_s = a$, $I_{yy} = 6a^4$.

(e) An welcher Stelle (x_m, z_m), ausgehend von der *Schwerpunktslinie*, ist die Druckspannung maximal? Welchen Wert darf q_0 gerade annehmen, damit an diesem Punkt die maximal zulässige Normalspannung σ_0 nicht überschritten wird?

Gegeben: q_0, l, a, E, σ_0

5 Bekannte Aufgabe 1 1+2+1+1+1 = 6 Punkte

Für ein Teilstück einer technischen Struktur ist der ebene Spannungszustand im x, y-Koordinatensystem mit $\sigma_{xx} = 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\sigma_{yy} = -1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ und $\tau_{xy} = 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ gegeben. Zur genaueren Analyse der Belastung sind die folgenden Arbeitsschritte durchzuführen.

(a) Geben Sie den Spannungstensor an.

(b) Bestimmen Sie *rechnerisch* die Hauptspannungen σ_1 und σ_2.

(c) Geben Sie die maximale Schubspannung τ_{max} an.

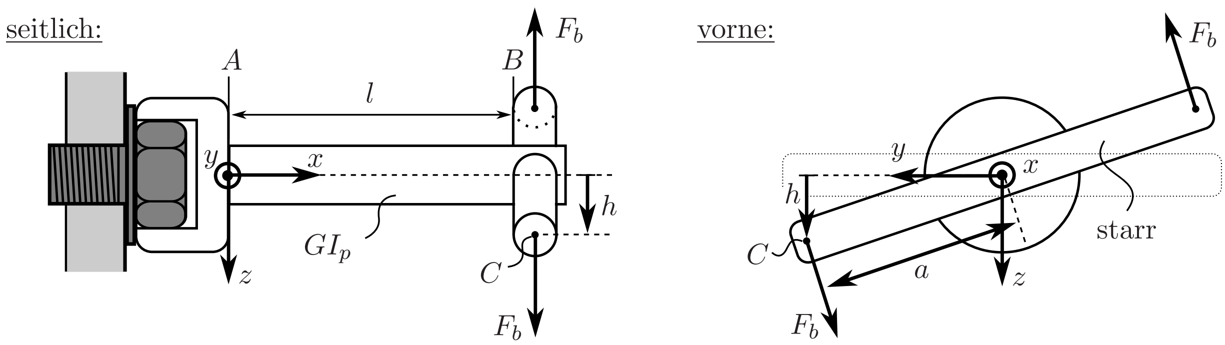
(d) Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für diesen Spannungszustand und kennzeichnen Sie σ_{xx}, σ_{yy} und τ_{xy} sowie σ_1, σ_2 und τ_{max}. Wählen Sie als Maßstab $1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{cm}$.

(e) Bestimmen Sie graphisch die Normalspannungen $\sigma_{\xi\xi}$ und $\sigma_{\eta\eta}$ und die Schubspannung $\tau_{\xi\eta}$ für das um $\varphi = -45°$ gegenüber dem x, y-System um die z-Achse gedrehte ξ, η-Koordinatensystem aus dem Mohrschen Spannungskreis.

Gegeben: $\sigma_{xx} = 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\sigma_{yy} = -1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\tau_{xy} = 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$

$\boxed{6}$ Torsion $\quad$ 1+1+4 = 6 Punkte

Mit dem skizzierten Steckschlüssel wird eine festsitzende Schraube gelöst. Der homogene, kreisrunde Abschnitt $A-B$ wird als elastisch (Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) und der gesamte Rest als *starr* angenommen. Unmittelbar vor dem Losbrechen (Lösen) der Schraube wurde die Auslenkung h des Punktes C gegenüber dem unbelasteten Zustand gemessen. Zur Bestimung des Losbrechmomentes M_b sind die folgenden Teilaufgaben zu lösen. Dabei können alle Verformungen als *klein* angenommen werden.



(a) Geben Sie die Materialstrukturgleichung für den Abschnitt $A-B$ an.

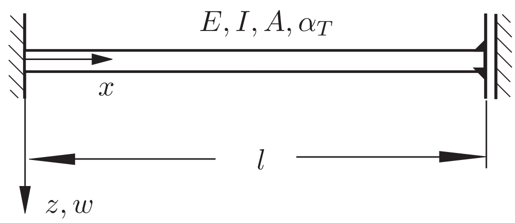
(b) Geben Sie den Torsionswinkel an der Stelle B in Abhängigkeit der Auslenkung h an.
Beachten Sie, dass alle Verformungen als *klein* angenommen werden können.

(c) Bestimmen Sie das Losbrechmoment M_b und die nötige Losbrechkraft F_b

Gegeben: l, a, h, GI_p

$\boxed{7}$ Bekannte Aufgabe 2 $\quad$ 2+2+5 = 9 Punkte

Der rechts skizzierte, homogene Stab wird zunächst spannungsfrei bei einer konstanten Temperatur eingebaut. Nun wird der Stab gleichförmig um ΔT erwärmt. Zur Abschätzung der Sicherheit gegen Knicken sind die folgenden Teilaufgaben zu bearbeiten.



(a) Berechnen Sie die aus der Temperaturerhöhung ΔT resultierende Druckkraft F.

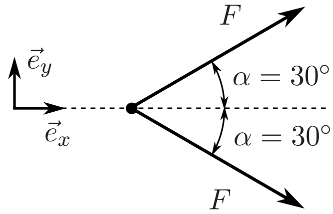
(b) Wie lautet die Differentialgleichung für das Knickproblem (Knickgleichung) und die zugehörige allgemeine Lösung?

(c) Geben Sie die nötigen Randbedingungen zur Bestimmung der Eigenwertgleichung an und berechnen Sie anschließend die kritische Knicklast F_{krit} des Systems.

Geg.: E, I, A, l, α_T, ΔT

Kurzfragen 20 Punkte

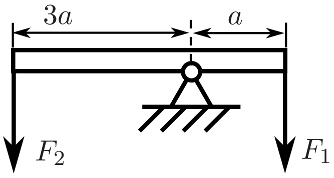
1. Geben Sie die resultierende Kraft $\vec{R}$ der eingezeichneten zentralen Kräftegruppe an. Verwenden Sie die eingezeichnete $\vec{e}_x, \vec{e}_y$-Basis!



$\vec{R} =$

Gegeben: F, $\alpha = 30°$ **1 Punkt**

2. An dem skizzierten, masselosen, reibungsfrei gelenkig gelagerten Hebel greifen die Kräfte F_1 und F_2 an. Welches Verhältnis $\frac{F_1}{F_2}$ muss zwischen den beiden Kräften herrschen, damit sich der Hebel im statischen Gleichgewicht befindet?



$\frac{F_1}{F_2} =$

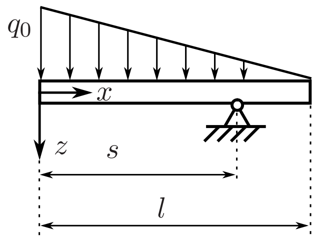
Gegeben: a **1 Punkt**

3. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten N, 1, kg, m und s an:

Lagermoment	M^A	
Streckenlast	$q(x)$	
Kettenlinie	$y(x)$	
Erdbeschleunigung	g	

1 Punkt

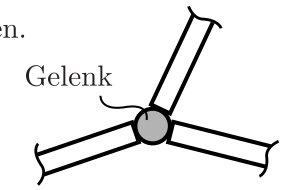
4. Ein starrer Balken der Länge l ist durch eine linear verlaufende Streckenlast $q(x)$ belastet und im Abstand s durch ein einzelnes Festlager gelagert. Welchen Wert muss s annehmen, damit das System im statischen Gleichgewicht ist?



$s =$

Gegeben: l, $q(x) = q_0(1 - \frac{x}{l})$ **1 Punkt**

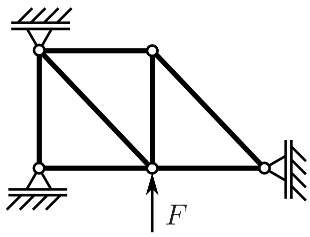
5. Das gezeigte System besteht aus drei gelenkig verbundenen, *ebenen* Stäben. Wie lautet die Wertigkeit des Gelenkes (Geben Sie an!)?



$v =$

1 Punkt

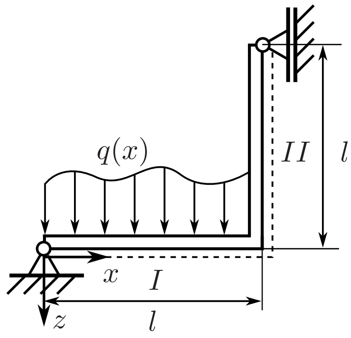
6. Das gezeigte ideale Fachwerk ist durch drei Loslager an die Umgebung gekoppelt. Ist das System statisch bestimmt (Begründen Sie!)?



Gegeben: F

1 Punkt

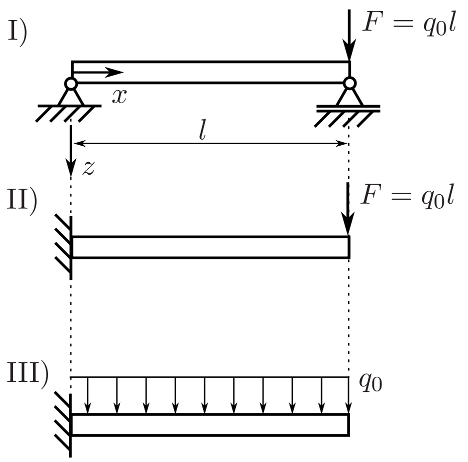
7. Geben Sie für das skizzierte System die *drei* zur Bestimmung der Schnittgrößen $N(x), Q(x)$ und $M(x)$ benötigten Übergangsbedingungen zwischen den Bereichen I und II an der Stelle $x = l$ an (*am Knick*)!

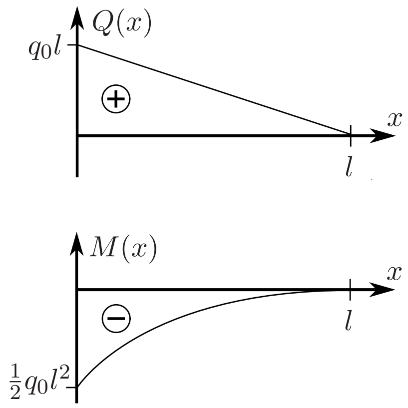


Gegeben: l, $q(x)$

1 Punkt

8. Welches der drei links gezeigten Systeme (I, II, III) passt zu den dargestellten Verläufen von Querkraft $Q(x)$ und Biegemoment $M(x)$ (Geben Sie an!)?



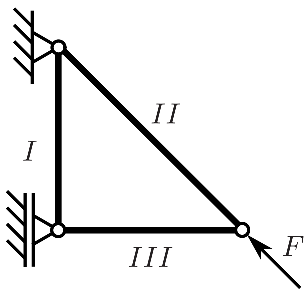


System:

Gegeben: l, q_0 **1 Punkt**

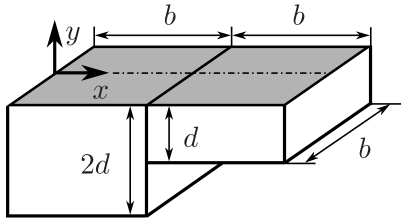
9. Das gezeigte ideale Fachwerk besteht aus drei gelenkig gelagerten Stäben und ist durch die Kraft F belastet. Kennzeichnen Sie die jeweilige Belastungsart in den drei Stäben (Kreuzen Sie an!).

Stab	Zugstab	Druckstab	Nullstab
I	○	○	○
II	○	○	○
III	○	○	○



Gegeben: $F > 0$ **1 Punkt**

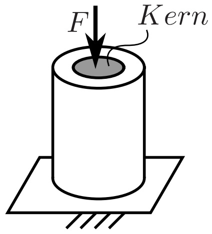
10. Ein technisches Bauteil ist aus zwei Quadern gleicher Deckfläche und Dichte zusammengesetzt. Bestimmen Sie die Koordinate x_s des *Massenschwerpunktes* S (die Masse der Quader ist unbekannt!).



$x_s =$

Gegeben: d, b **1 Punkt**

11. Der rechts skizzierte, elastische Kragbalken wird durch eine Einzelkraft $F > 0$ belastet. Diese greift innerhalb des *Kerns* des Querschnitts an. Welche Bedingung gilt in diesem Fall für die Normalspannung σ innerhalb des Balkens?

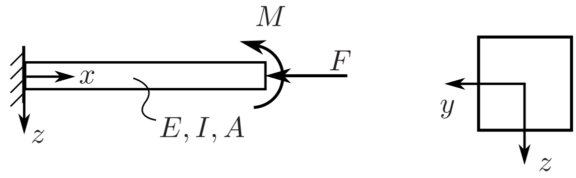


σ $\boxed{}$ 0

Gegeben: $F > 0$ **1 Punkt**

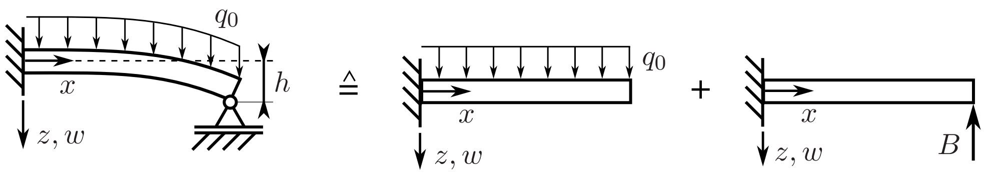
12. In welchem Abstand z_0 vom Schwerpunkt verläuft die neutrale Faser für den gegeben Belastungsfall?

$z_0 =$



Gegeben: E, A, I, F, M **1 Punkt**

13. Der links gezeigte und um die Auslenkung h *vorgespannte* Balken der Länge l soll durch die rechts gezeigte Superposition zweier statisch bestimmter Systeme mit noch unbestimmter Kraft B gleichwertig ersetzt werden. Wie lautet die korrekte, geometrische Verträglichkeitsbedingung?



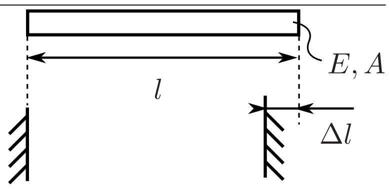
Gegeben: l, q_0, h **1 Punkt**

14. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten N, 1, kg, m und s an:

Schubmodul	G	
Biegelinie	$w(x)$	
Steiner-Anteil	$z_i^2 A_i$	
Knicklast	F_{krit}	

1 Punkt

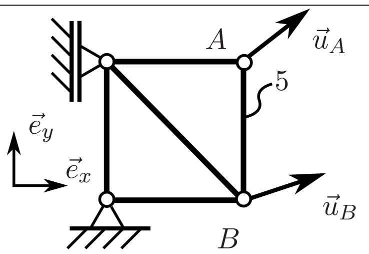
15. Ein ideal elastischer Stahlstift der Länge l wird in einen Zwischenraum eingeklemmt, der um den Betrag Δl kürzer ist. Wie groß ist die entstehende Normalspannung im Stab?



$\sigma =$

Gegeben: l, E, A, Δl **1 Punkt**

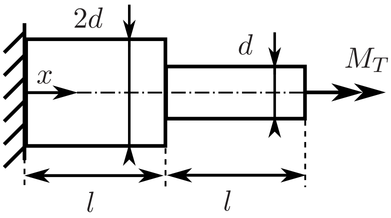
16. Für das System aus elastischen Stäben seien die Verschiebungen der Punkte A und B bekannt. Geben Sie die Längenänderung Δl des Stabes 5 unter der Annahme kleiner Verformungen an.

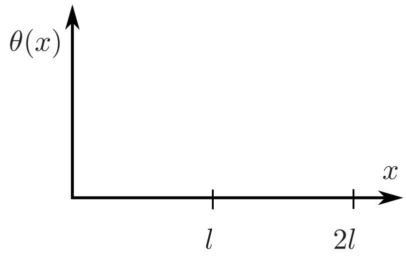


$\Delta l =$

Gegeben: $\vec{u}_A = u_{ax}\vec{e}_x + u_{ay}\vec{e}_y$, $\vec{u}_B = u_{bx}\vec{e}_x + u_{by}\vec{e}_y$ **1 Punkt**

17. Die links fest eingespannte Welle besteht aus zwei kreisrunden, homogenen Abschnitten (Schubmodul G) und ist rechts durch das Torsionsmoment M_T belastet. Skizzieren Sie *qualitativ* den Verlauf des Torsionswinkels θ über x (Sie müssen keine Werte angeben!).



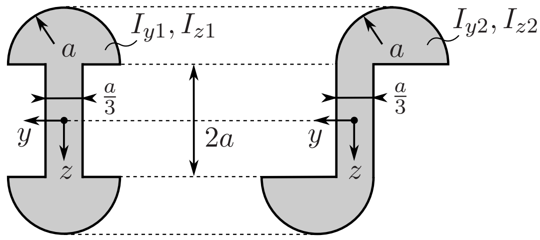


Gegeben: G, M_T, l, d **1 Punkt**

18. Geben Sie das Verhältnis $(=, <, >)$ der Flächenträgheitsmomente I_{yi} und I_{zi} bezüglich der jeweiligen Schwerpunkte der beiden unten dargestellten, flächengleichen ($A_1 = A_2$) Körper an (Tragen Sie ein!).

I_{y1} $\square$ I_{y2}

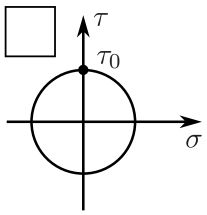
I_{z1} $\square$ I_{z2}

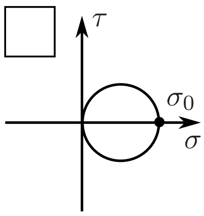


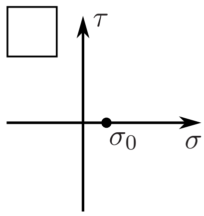
Gegeben: a **1 Punkt**

19. Ordnen Sie die drei gegebenen ebenen Spannungszustände ($\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2, \underline{\sigma}_3$) den drei unten abgebildeten Mohrschen Spannungskreisen zu (Tragen Sie ein!).

1) $\underline{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2)** $\underline{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{pmatrix}$ **3)** $\underline{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$



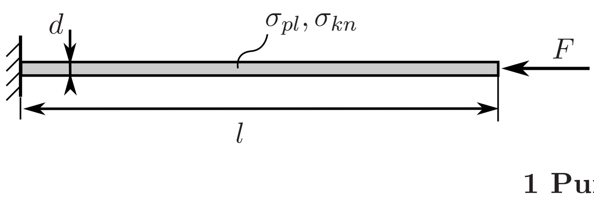




Gegeben: σ_0, τ_0 **1 Punkt**

20. Für den auf Druck belasteten, kreisrunden Stab gilt, dass bei einem Verhältnis von $\frac{l}{d} = 30$ die Fließspannung und die Knickspannung *gerade übereinstimmen* ($\sigma_{pl} = \sigma_{kn}$). Was muss gelten $(=, <, >)$, damit der Stab *zuerst* durch Knicken versagt (Tragen Sie ein!)?

$\frac{l}{d}$ $\square$ 30



Gegeben: σ_{pl}, σ_{kn}, F **1 Punkt**