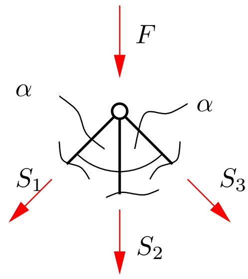
Tutorium

Aufgabe 82

(a) Das System ist statisch unbestimmt. Es existieren 3 unbekannte Stabkräfte aber nur 2 Gleichgewichtsbedingungen, da alle Kräfte denselben Angriffspunkt besitzen (Zentrale Kräftegruppe).

Zur Bestimmung der Stabkräfte benötigen wir zusätzlich die Verformungen!

Freischnitt des unverformten Systems:



Der Winkel $\alpha = 45°$ besteht sowohl zwischen Stab1 und Stab2 als auch zwischen Stab2 und Stab3.

Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_3 \tag{1}$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2S_1 \cos\alpha - S_2 - F = 0 \tag{2}$$

Modifizierte Materialgesetze:
(das folgende gilt nur bei verschwindener Streckenlast $q_0(x) = 0$)

$$S_i = E_i A_i \frac{\Delta l_i}{l_i} \tag{3}$$

Die Stäbe besitzen denselben E-modul; Stab2 hat jedoch eine doppelt so große Querschnittsfläche, wie die anderen beiden. Die Längen der Stäbe in der unverformten Lage sind

$$l_1 = l_3 = \sqrt{2}l; \quad l_2 = l; \tag{4}$$

Geometrisch linearisierte Verformungskinematik:

$$\underline{u}_A = -u_y \underline{e}_y \tag{5}$$

Die Längenänderungen der Stäbe sind

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_y) \cdot (-u_y)\underline{e}_y = \frac{-u_y}{\sqrt{2}} \tag{6}$$
$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_A = \underline{e}_y \cdot (-u_y)\underline{e}_y = -u_y \tag{7}$$
$$\Delta l_3 = \underline{e}_3 \cdot \underline{u}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_x + \underline{e}_y) \cdot (-u_y)\underline{e}_y = \frac{-u_y}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

Einsetzen von (6), (7) und (8) in (3) liefert

$$S_1 = -\frac{EA}{2l} u_y = S_3 \tag{9}$$
$$S_2 = -\frac{2EA}{l} u_y \tag{10}$$

Ein Vergleich von (9) und (10) ergibt

$$S_2 = 4S_1 \tag{11}$$

Einsetzen der Gleichung (11) in (2) führt zu

$$-2S_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - 4S_1 = F \Rightarrow \underline{\underline{S_1 = S_3 = \frac{-F}{4+\sqrt{2}}}} \tag{12}$$

sowie (12) in (11)

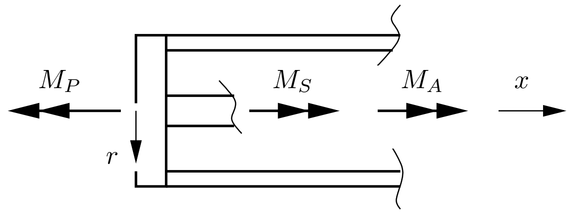
$$\Rightarrow \underline{\underline{S_2 = \frac{-4F}{4+\sqrt{2}}}} \tag{13}$$

(b) Die Verschiebung erhält man nun z.B. durch Einsetzen von (12) in (9) und Umformung

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_y = \frac{Fl}{EA(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2)}}} \tag{14}$$

Aufgabe 95

Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_P = M_S + M_A \tag{15}$$

M_P ... an der Platte angreifendes äußeres Moment
M_S ... Schnittmoment in der Stahlwelle
M_A ... Schnittmoment in der Alu-Hohlwelle

Geometrie: Durch die Verbindung mit der starren Platte müssen der Verdrehwinkel der Stahlwelle ϑ_S und der Verdrehwinkel der Aluwelle ϑ_A gleich sein (ϑ_p = Verdrehwinkel der Platte gegen die Einspannung):

$$\vartheta_A = \vartheta_S = \vartheta_p \tag{16}$$

Materialgesetz:

$$M = GI_t \frac{d\vartheta}{dx} \tag{17}$$

mit $I_t = I_p$ bei Kreisquerschnitten und $I_p = \int r^2 dA$, hier also für die Vollwelle:

$$I_{t,S} = \int_0^{\frac{d}{2}} r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{32} d^4 \tag{18}$$

und für die Hohlwelle

$$I_{t,A} = \int_{\frac{d_i}{2}}^{\frac{d_a}{2}} r^2\, 2\pi r dr = \frac{\pi}{32}\left(d_a^4 - d_i^4\right) \tag{19}$$

Integration von (17) über die gesammte Länge l (für den Fall, dass M, G und I_t über l konstant sind, also homogene Torsion vorliegt):

$$Ml = GI_t\vartheta \tag{20}$$

(16) und (20) eingesetzt in (15) ergibt:

$$M_p = \left(G_S I_{t,S} + G_A I_{t,A}\right) \frac{\vartheta_p}{l} \tag{21}$$

Schubwinkel/Drillung: $\gamma = r\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$,
HOOKEsches Gesetz: $\tau = G\,\gamma$

$$\tau(r) = G\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\, r \tag{22}$$

Offenbar tritt die größte Spannung jeweils am Außenrand der Welle auf. Mit $\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\vartheta_p}{l}$ (homogene Torsion) ergibt sich:

$$\tau_{\max} = G\,\frac{\vartheta_p}{l}\, r_{\text{außen}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\vartheta_p}{l} = \frac{\tau_{\max}}{G\, r_{\text{außen}}} \tag{23}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Stahlwelle die zulässige Schubspannung für Stahl τ_S herrscht, ergibt sich aus (23) mit (21):

$$M_{p,S} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right) \frac{\tau_S}{G_S \frac{d}{2}} \tag{24}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Aluwelle die zulässige Schubspanung für Aluminium τ_A herrscht, lautet analog:

$$M_{p,A} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right) \frac{\tau_A}{G_A \frac{d_a}{2}} \tag{25}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich:

$$I_{t,S} = 6{,}14 \cdot 10^{-7}\text{m}^4 \tag{26}$$
$$I_{t,A} = 2{,}00 \cdot 10^{-6}\text{m}^4 \tag{27}$$
$$M_{p,S} = 6190 \text{ N m} \tag{28}$$
$$M_{p,A} = 7039 \text{ N m} \tag{29}$$

Bei einem Drehmoment größer als 6190 N m wird die zulässige Spannung in der Stahlwelle überschritten. Das maximal zulässige Drehmoment beträgt also:

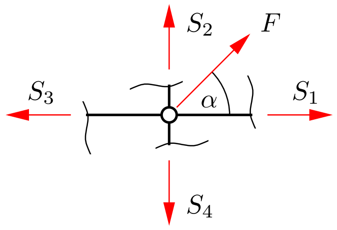
$$\underline{M_{\text{zul}} = 6190\,\text{N m}} \tag{30}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 86

Das System ist statisch unbestimmt, d.h. die Gleichgewichtsbedingungen allein reichen nicht aus, um die Stabkräfte zu berechnen.

Freischnitt des unverformten Systems:



Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 - S_3 + F\cos\alpha = 0 \tag{31}$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_4 + F\sin\alpha = 0 \tag{32}$$

Modifizierte Materialgesetze:

$$S_i = EA\frac{\Delta l_i}{l_i} \tag{33}$$

Die Querschnittsfläche aller Stäbe ist

$$A = D^2 \tag{34}$$

Die Längen der Stäbe in der unverformten Lage sind

$$l_1 = b; \qquad l_2 = d; \tag{35}$$
$$l_3 = a; \qquad l_4 = c; \tag{36}$$

Geometrisch linearisierte Verformungskinematik:

Die Längenänderungen der Stäbe werden durch Projektionen des Verschiebungsvektors $\underline{u}_P$ auf die Stabrichtungen der unverformten Lage gebildet. Die Stabeinheitsvektoren weisen dabei stets entlang der Stäbe zum Punkt hin, welcher sich verschiebt. Der Verschiebungsvektor $\underline{u}_P$ setzt sich bei Zugrundelegung einer kartesischen Basis, deren Basisvektoren in Richtung der positiven Koordinatenrichtungen zeigen, wie folgt zusammen:

$$\underline{u}_P = u_x\underline{e}_x + u_y\underline{e}_y \tag{37}$$

Die Längenänderungen der Stäbe sind

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = -u_x \tag{38}$$
$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = -u_y \tag{39}$$
$$\Delta l_3 = \underline{e}_3 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = u_x \tag{40}$$
$$\Delta l_4 = \underline{e}_4 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = u_y \tag{41}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta l_1 = -\Delta l_3 = -u_x \tag{42}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta l_2 = -\Delta l_4 = -u_y \tag{43}$$

Einsetzen in (33) liefert

$$S_1 = -\frac{EA}{b}u_x; \qquad S_3 = \frac{EA}{a}u_x; \tag{44}$$
$$S_2 = -\frac{EA}{d}u_y; \qquad S_4 = \frac{EA}{c}u_y; \tag{45}$$

Einsetzen der Gleichungen (44) in (31)

$$-EA(\frac{1}{b} + \frac{1}{a})u_x + F\cos\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_x = \frac{F\cos\alpha}{EA(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}}} \tag{46}$$

Einsetzen der Gleichungen (45) in (32)

$$-EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})u_y + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_y = \frac{F\sin\alpha}{EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})}}} \tag{47}$$

Aufgabe 93

(a) Schubverformung bei Kreisquerschnitten:

$$\gamma = r\frac{d\theta}{dx} \tag{48}$$

mit x-Achse als Wellenachse und $\theta(x)$ als Verdrehwinkel der Welle an der Stelle x. γ ist der Gleit- oder Schubwinkel.

Das HOOKEsche Gesetz verknüpft Torsionsspannungen τ und Gleitungen γ

$$\tau = G\gamma \tag{49}$$

Daraus folgt

$$\tau(r) = G\frac{d\theta}{dx}r \tag{50}$$

Das resultierende Moment der Schubspannungen in der tordierten Welle ist

$$M = \int_A r\tau dA \left(= \int_{r_i}^{r_a} r\tau(r)2\pi r dr\right) \tag{51}$$

Mit (50) folgt das Moment, das durch die Verwindung $\frac{d\theta}{dx}$ hervorgerufen wird:

$$M = G\left(\int_A r^2 dA\right)\frac{d\theta}{dx} = GI_p\frac{d\theta}{dx} \tag{52}$$

Der darin enthaltene Ausdruck

$$I_p = \int r^2 dA = 2\pi\int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \tag{53}$$

wird als polares Flächenträgheitsmoment bezeichnet.

Die maximale Spannung in der Welle tritt am Außenrand bei $r = r_a$ auf, wie man aus Gl.(50) sofort sieht. Die maximal zulässige Verwindung $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max}$ ist dann erreicht, wenn am Außenrand die maximal zulässige Spannung τ_{zul} erreicht wird. Aus (50) ergibt sich:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max} = \frac{\tau_{zul}}{G\,r_a} \tag{54}$$

Das Moment, das die Welle dabei überträgt, ergibt sich aus (52) mit (53):

$$M_{max} = \frac{\pi}{2}\frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a}\tau_{zul}. \tag{55}$$

$$M_{max,1} = 45{,}20\text{ kN m} \tag{56}$$

(b) Eine Vollwelle gleicher Masse hat die gleiche Querschnittsfläche πr_{a2}^2 wie die Welle aus Teil (a): $\pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right)$.

$$\Rightarrow r_{a2} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{i1}^2} = 55{,}9\text{ mm} \tag{57}$$

$$\Rightarrow M_{max,2} = 23{,}32\text{ kN m} \tag{58}$$

$\Rightarrow$ Die Hohlwelle gleicher Querschnittsfläche läßt ein fast doppelt so großes Torsionsmoment im Vergleich zur Vollwelle zu!

(c) Hier gilt analog zu Teil (b):

$$\pi\left(r_{a3}^2 - r_{i3}^2\right) = \pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right) \tag{59}$$

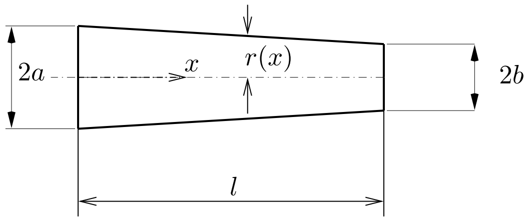
$$r_{i3} = \sqrt{r_{a3}^2 - r_{a1}^2 + r_{i1}^2} = 82{,}92\,\text{mm} \tag{60}$$

$$M_{max,3} = 70{,}41\text{ kN m} \tag{61}$$

$\Rightarrow$ Eine Vergrößerung der Radien bei gleicher Querschnittsfläche führt zu einem noch höheren zulässigen Torsionsmoment. Grund dafür ist der Anstieg des polaren Flächenträgheitsmomentes.

Aufgabe 98

(a)



Geradengleichung für den Radius des Kegels:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{b-a}{l}x + a \\ &:= \alpha x + \beta \end{aligned}$$

Polares Trägheitsmoment für die Kreisfläche:

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \frac{\pi}{2} r(x)^4 \\ &= \frac{\pi}{2}(\alpha x + \beta)^4 \end{aligned}$$

(b) Annahmen $M_t = const.$, $G = const.$, Torsions-Dgl. (gilt eigentlich nur für zylindrische Abschnitte, d.h. der Kegel muss stumpf sein! Siehe Szabo)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{M_T}{GI_p} \\ \varphi &= \int_0^l \frac{M_T}{G\frac{\pi}{2}(\alpha x + \beta)^4} dx \\ &= \frac{2M_T}{G\pi} \int_0^l \frac{1}{(\alpha x + \beta)^4} dx \\ &= \frac{2M_T}{G\pi} \int_a^b \frac{1}{z^4}\frac{1}{\alpha} dz \\ &= \frac{2M_T}{G\pi} \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}\frac{1}{\alpha} \right]_a^b \\ &= \frac{2M_T l}{3G\pi(b-a)}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 99

(a) Polares Flächenträgheitsmoment Querschnitt (A):

$$\begin{aligned} I_T^{\text{A}} = I_p^{\text{A}} &= \int r^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 |_0^R d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\pi R^4 = \frac{1}{2}\pi \cdot (10\text{ cm})^4 = 15708\text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Polares Flächenträgheitsmoment Querschnitt (B):

$$I_T^{\text{B}} = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{h(s)}} \text{ mit}$$

$$\oint \frac{ds}{h(s)} = \frac{2\pi R}{t},\ A_m^2 = (\pi R^2)^2$$

$$I_t^{\text{B}} = \frac{4(\pi R^2)^2}{2\pi R} t = 2\pi R^3 t = 2\pi \cdot (10\text{ cm})^3 \cdot 0{,}2\text{ cm} = 1257\text{ cm}^4$$

Bei gleichem Material ist die Steifigkeit proportional zum polaren Flächenträgheitsmoment:

$$\frac{I_T^A}{I_T^B} = \frac{\frac{1}{2}\pi R^4}{2\pi R^3 t} = 12{,}5$$

(b)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{M_T}{WT} \Rightarrow \text{zul}M_T = \tau_{\text{zul}} \cdot W_T \\ W_T^A &= \frac{I_T^A}{r_a} = \frac{15708}{10} = 1571\text{ cm}^3 \\ W_T^B &= 2A_M h(s) = 2\pi \cdot 10^2 \cdot 0{,}2 = 126\text{ cm}^3 \\ M_{T,\text{zul}}^A &= 12566\text{ kNcm} = 126\text{ kNm} \\ M_{T,\text{zul}}^B &= 1005\text{ kNcm} = 10\text{ kNm} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{M_T}{GI_T} l \\ \chi^A &= 0{,}0198 \approx 1{,}13° \\ \chi^B &= 0{,}0198 \approx 1{,}13° \end{aligned}$$

(d)