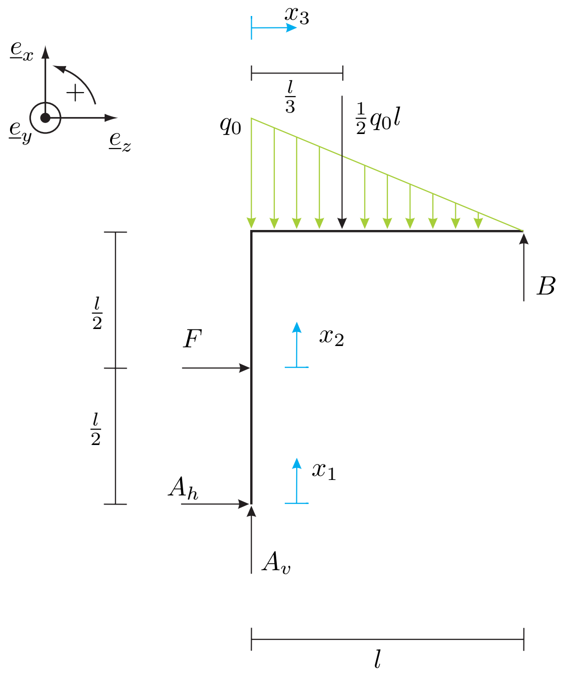
Tutorium

Aufgabe 69

(a) Für die Berechnung der Schnittgrößen werden die Laggerreaktionen benötigt. Um diese zu bestimmen wird das Gesamtsystem freigeschnitten:



Beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen wird das globale $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$-System benutzt (siehe Aufgabenstellung). Die Ersatzlast der Streckenlast wird **nach** dem Freischnitt angetragen (auf die Bestimmung der Ersatzlast und des Angriffspunktes einer Dreiecks-Last wird hier nicht weiter eingegangen.).
Momentengleichgewicht um Punkt A:

$$\sum M^{(A)} = -\frac{l}{2}F - \frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{2}q_0 l + lB \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}F + \frac{1}{6}q_0 l} \tag{2}$$

Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$\sum F_x = A_h + F \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$

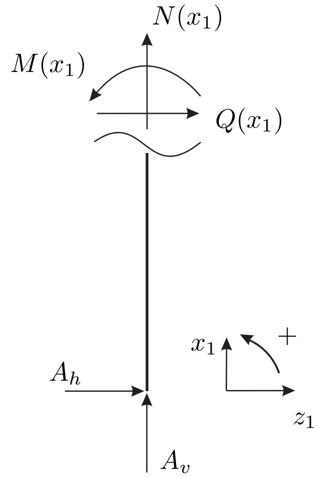
$$\Rightarrow \boxed{A_h = -F} \tag{4}$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung (mit Gleichung (2)):

$$\sum F_y = A_v + B - \frac{1}{2}q_0 l \stackrel{!}{=} 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = -\frac{1}{2}F + \frac{1}{3}q_0 l} \tag{6}$$

Für die Berechnung der Schnittkräfte wird das System in drei Bereiche geteilt (bei jeder Unstetigkeitsstelle fängt ein neuer Bereich an, hier bei der Krafteinleitung und der Geometrieänderung). Der erste Bereich geht vom Lager A bis zu der eingeleiteten Kraft F. Die Schnittgrößen in diesem Abschnitt werden in Abhängigkeit der Koordinate x_1 beschrieben[1]. Die berechneten Lagergrößen werden gleich eingesetzt.



$$\sum F \uparrow: \quad A_v + N(x_1) \stackrel{!}{=} 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{N(x_1) = \frac{1}{2}F - \frac{1}{3}q_0 l} \tag{8}$$

$$\sum F \rightarrow: \quad = A_h + Q(x_1) \stackrel{!}{=} 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(x_1) = F} \tag{10}$$

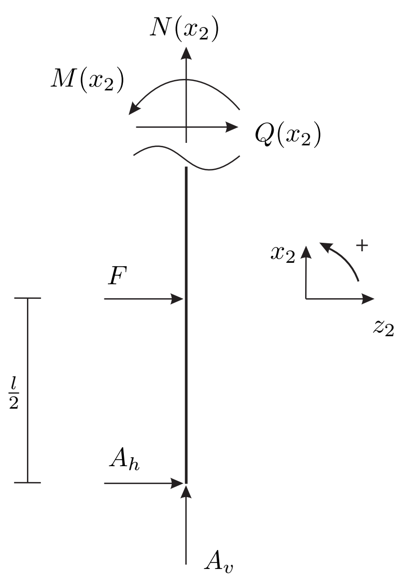
Das Momentengleichgewicht wird bei Schnittgrößenberechnung um den Schnittpunkt (hier also um die Stelle x_1) aufgestellt.

$$\sum M \curvearrowleft: \quad M(x_1) + A_h x_1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x_1) = F x_1} \tag{12}$$

Der zweite Bereich geht von der eingeleiteten Kraft bis zu der Geometrieänderung des Tragwerkes. Hier werden die Schnittgrößen in Abhängigkeit der Koordinate x_2 beschrieben.

[1] Dies ist eine lokale Koordinate. Die Ergebnisse hängen nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab, diese ist also im Prinzip frei. Hier werden die lokalen Koordinaten so gewählt, dass die x-Achse in Balkenrichtung geht.



$$\sum F \uparrow: \quad A_v + N(x_2) \overset{!}{=} 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(x_2) = \frac{1}{2}F - \frac{1}{3}q_0 l} \tag{14}$$

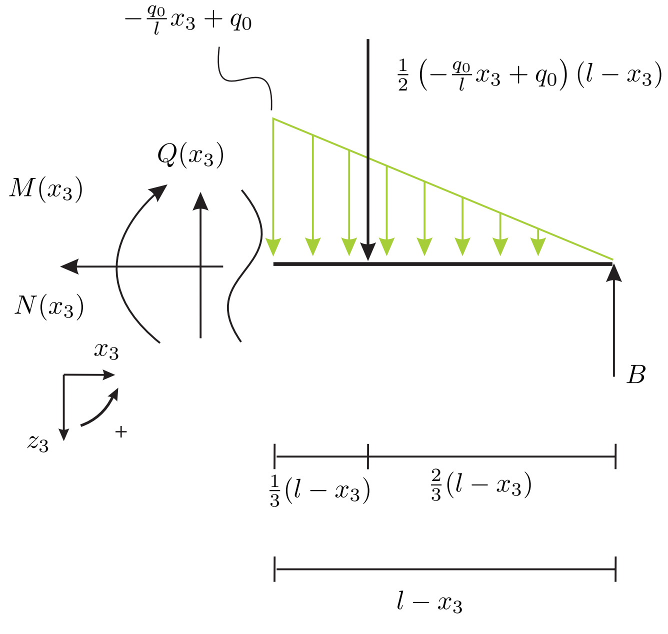
$$\sum F \rightarrow: \quad A_h + F + Q(x_2) \overset{!}{=} 0 \tag{15}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q(x_2) = 0} \tag{16}$$

$$\sum M \curvearrowleft: \quad M(x_2) + A_h(\frac{l}{2} + x_2) + F x_2 \overset{!}{=} 0 \tag{17}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M(x_2) = \frac{l}{2}F} \tag{18}$$

Der dritte Bereich geht von der Geometrieänderung bis zum Ende des Balkens. Hier ist zu beachten, das die globale Koordinate x_3, in dessen Abhängigkeit die Schnittgrößen in diesem Abschnitt beschrieben werden, in Richtung des Balkens zeigt.



Ebenfalls wichtig ist in diesem Fall die Behandlung der Streckenlast. Es wird das negative Schnittufer gewählt, damit eine dreicksförmige Streckenlast behandelt werden muss und nicht eine trapezförmige. Die Ersatzkraft ändert sich mit veränderlichem x_3, mit anderen Worten: das Dreieck wird mit wachsendem x_3 kürzer. Die entsprechenden Werte für die Ersatzlast und den Angriffspunkt sind in der Skizze notiert.

$$\sum F \rightarrow: \quad -N(x_3) \overset{!}{=} 0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(x_3) = 0} \tag{20}$$

$$\sum F \downarrow: \quad -Q(x_3) + \frac{1}{2}\left(-\frac{q_0}{l}x_3 + q_0\right)(l - x_3) - B \overset{!}{=} 0 \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q(x_3) = \frac{1}{3}q_0 l - \frac{1}{2}F - q_0 x_3 + \frac{q_0}{2l}x_3^2} \tag{22}$$

$$\sum M \curvearrowleft: \quad -\frac{1}{2}\left(-\frac{q_0}{l}x_3 + q_0\right)(l - x_3)\frac{1}{3}(l - x_3) - M(x_3) + B(l - x_3) \overset{!}{=} 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M(x_3) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{q_0}{l}x_3 + q_0\right)(l - x_3)^2 + B(l - x_3)} \tag{24}$$

Hier wurde B aus Platzgründen nicht eingesetzt.

(b) Um die Schnittlasten zu skizzieren wird der gegebene Wert für F in die berechneten entsprechenden Verläufe in den drei Bereichen eingesetzt.

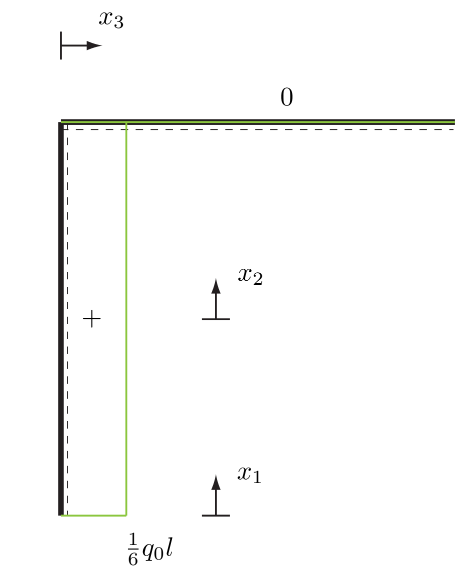
Normalkraftverlauf:

$$\text{Bereich 1} \quad \boxed{N(x_1) = \frac{1}{6}q_0 l} \tag{25}$$

$$\text{Bereich 2} \quad \boxed{N(x_2) = \frac{1}{6}q_0 l} \tag{26}$$

$$\text{Bereich 3} \quad \boxed{N(x_3) = 0} \tag{27}$$

Damit ergibt sich folgende Skizze für den Normalkraftverlauf:



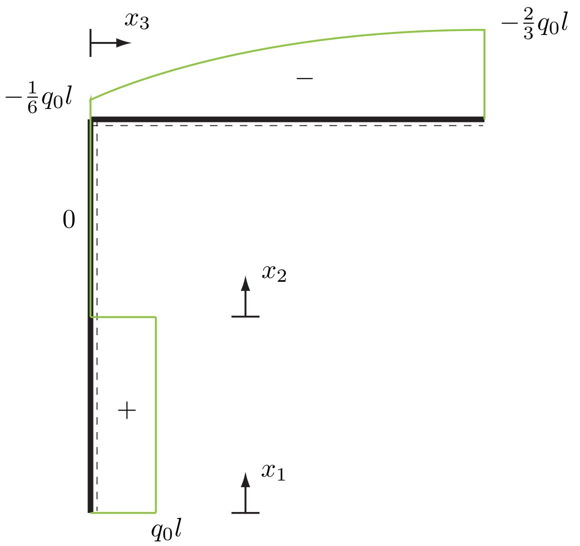
Querkraftverlauf:

Bereich 1 $\boxed{Q(x_1) = F}$ (28)

Bereich 2 $\boxed{Q(x_2) = 0}$ (29)

Bereich 3 $\boxed{Q(x_3) = -q_0 x_3 + \frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x_3^2 - \frac{1}{6}q_0 l}$ (30)

Damit ergibt sich folgende Skizze für den Querkraftverlauf:



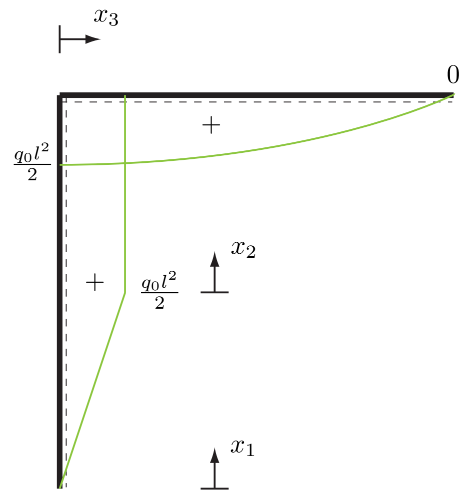
Biegemomentenverlauf:

Bereich 1 $\boxed{M(x_1) = q_0 l x_1}$ (31)

Bereich 2 $\boxed{M(x_2) = \frac{l}{2}F}$ (32)

Bereich 3 $\boxed{M(x_3) = \frac{1}{2}q_0 l^2 - \frac{1}{6}q_0 l x_3 - \frac{1}{2}q_0 x_3^2 + \frac{q_0}{6l}x_3^3}$ (33)

Damit ergibt sich folgende Skizze für den Biegemomentenverlauf:

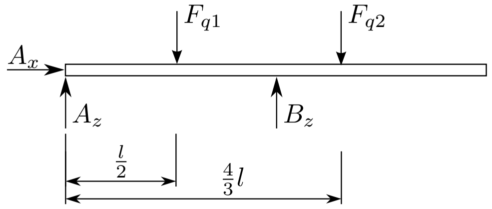


(c) Das maximale Biegemoment lässt sich leicht aus der Skizze aus dem vorigen Aufgabenteil ablesen:

$$\boxed{M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{2}} \tag{34}$$

Aufgabe 70

(a) Schnittlasten
(i) Globalschnittverfahren
Zunächst wird der Balken freigeschnitten und die Streckenlast durch ihre Resultierende ersetzt.

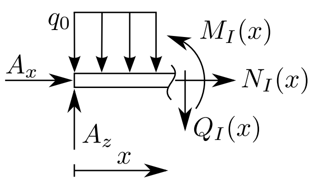


GGB:

$$\sum M^{(A)} = B_z \cdot l - F_{q1} \cdot \frac{l}{2} - F_{q2} \cdot \frac{4}{3}l \tag{35}$$
$$\Rightarrow B_z = \frac{1}{2}F_{q1} + \frac{4}{3}F_{q2} = \frac{1}{2}q_0 l + \frac{2}{3}q_0 l = \underline{\underline{\frac{7}{6}q_0 l}}$$

$$\sum F_z = -A_z - B_z + F_{q1} + F_{q2} = 0 \tag{36}$$
$$\Rightarrow A_z = -\frac{7}{6}q_0 l + q_0 l \frac{1}{2}q_0 l = \underline{\underline{\frac{1}{3}q_0 l}}$$

I. Bereich: $0 \leq x < l$



Funktion der Streckenlast im Bereich I:

$$q_I(x) = q_0 \tag{37}$$

Resultierende der Streckenlast in Abhängigkeit des Schnittpunkts:

$$F_{qx}(x) = q_I(x) \cdot x = q_0 \cdot x \tag{38}$$

GGB:

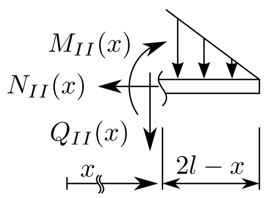
$$\sum F_z = Q_I(x) + F_{qx} - A_z = 0 \tag{39}$$

$$\Rightarrow Q_I(x) = \underline{\underline{-q_0 x + \frac{1}{3} q_0 l}} \tag{40}$$

$$\sum M^{(S)} = M_I(x) - A_z \cdot x + F_{qx} \cdot \frac{x}{2} = 0 \tag{41}$$

$$\Rightarrow M_I(x) = \underline{\underline{-q_0 l \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} q_0 l x}} \tag{42}$$

II. Bereich: $l \le x \le 2l$



Funktion der Streckenlast im Bereich II:

$$q_{II}(x) = \frac{q_0}{l}(2l - x) \tag{43}$$

Resultierende der Streckenlast in Abhängigkeit des Schnittpunkts:

$$F_{qx}(x) = q_{II}(x) \cdot (2l - x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{q_0}{l}(2l - x)^2 \tag{44}$$

GGB:

$$\sum F_z = -Q_{II}(x) + F_{qx} = 0 \tag{45}$$

$$\Rightarrow Q_{II}(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{q_0}{l}(2l - x)^2}} \tag{46}$$

$$\sum M^{(S)} = -M_{II}(x) + F_{qx} \cdot \frac{1}{3}(2l - x) = 0 \tag{47}$$

$$\Rightarrow M_{II}(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{6}\frac{q_0}{l}(2l - x)^3}} \tag{48}$$

(ii) <u>Lösung mittels Schnittlasten-DGL</u>

I. Bereich: $0 \le x < l$, $q_I(x) = q_0$

$$Q_I'(x) = -q_I(x) = -q_0 \tag{49}$$

$$Q_I(x) = -q_0 x + C_1 \tag{50}$$

$$M_I(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{51}$$

II. Bereich: $l \le x \le 2l$, $q_{II}(x) = -\frac{q_0}{l}x + 2q_0$

$$Q_{II}'(x) = -q_{II}(x) = \frac{q_0}{l}x - 2q_0 \tag{52}$$

$$Q_{II}(x) = \frac{q_0}{l}\frac{x^2}{2} - 2q_0 x + C_3 \tag{53}$$

$$M_{II}(x) = \frac{q_0}{l}\frac{x^3}{6} - q_0 x^2 + C_3 x + C_4 \tag{54}$$

Dynamische Rand- und Übergangsbedingungen:

$$M_I(0) = 0 \tag{55}$$

$$M_I(l) = M_{II}(l) \tag{56}$$

$$M_{II}(2l) = 0 \tag{57}$$

$$Q_{II}(2l) = 0 \tag{58}$$

Aus (55) folgt

$$C_2 = 0 \tag{59}$$

Aus (58) folgt

$$C_3 = 2q_0 l \tag{60}$$

Aus (57) und (60) folgt

$$C_4 = -\frac{4}{3} q_0 l^2 \tag{61}$$

Aus (56), (59), (60) und (61) folgt schließlich noch

$$C_1 = \frac{1}{3} q_0 l \tag{62}$$

Für die Schnittlastenverläufe ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} Q_I(x) &= -q_0 x + \frac{1}{3} q_0 l & (63)\\ M_I(x) &= -q_0 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} q_0 l x & (64)\\ Q_{II}(x) &= \frac{q_0}{l}\frac{x^2}{2} - 2q_0 x + 2q_0 l & (65)\\ M_{II}(x) &= \frac{q_0}{l}\frac{x^3}{6} - q_0 x^2 + 2q_0 l x - \frac{4}{3} q_0 l^2 & (66) \end{aligned}}$$

(b) Betragsmäßig größtes Biegemoment

Für relative Extrema gilt $M'(x) \stackrel{!}{=} 0$, daraus folgt $Q(x) \stackrel{!}{=} 0$.

I. Bereich:

$$Q_I(x) = -q_0 x + \frac{1}{3} q_0 l = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} l \tag{67}$$

$$\underline{M_I(x = \frac{1}{3} l) = \frac{1}{18} q_0 l^2} \tag{68}$$

II. Bereich:

$$Q_{II}(x) = \frac{q_0}{l}\frac{x^2}{2} - 2q_0 x + 2q_0 l = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 2l \tag{69}$$

$$\underline{M_{II}(x = 2l) = 0} \tag{70}$$

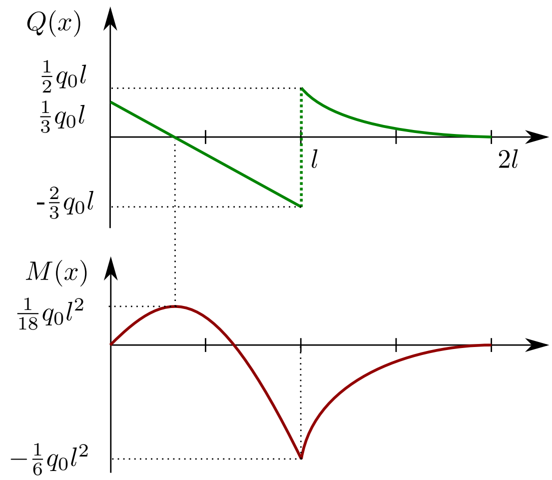
Untersuchung der Ränder und Bereichsübergänge:
An den Systemränder $x = 0$ und $x = 2l$ verschwindet das Biegemoment jeweils. An der Bereichsgrenze gilt:

$$M_I(l) = M_{II}(0) = -\frac{1}{6}q_0 l^2 \tag{71}$$

⇒ An der Stelle $x = l$ ist das Moment betragsmäßig am größten.

$$\underline{\underline{|M(x)|_{\max} = |M(l)| = \frac{1}{6}q_0 l^2}} \tag{72}$$

(c) Graphische Veranschaulichung der Schnittlasten



Auf die Vorzeicheneinträge in den Flächen darf hier verzichtet werden, da die positiven Zählrichtungen der Achsen angegeben sind.

Hausaufgaben

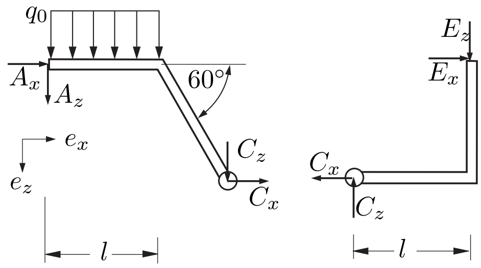
Aufgabe 68

(a)

$$f = 2 \cdot 3 = 6; \qquad r = 4; \qquad v = 2;$$
$$n = f - r - v = 0$$

Außerdem ist das System weder wackelig noch vorspannbar $\Rightarrow$ System ist statisch bestimmt.

(b)



$$\begin{aligned} A_x + C_x &= 0 \\ A_z + C_z + q_0 l &= 0 \\ C_x l - C_z(l + \frac{1}{\sqrt{3}} l) - q_0 \frac{l^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x - C_x &= 0 \\ E_z - C_z &= 0 \\ -C_x l - C_z l &= 0 \end{aligned}$$

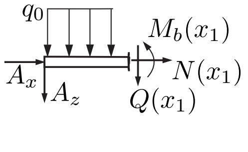
$$A_x = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \qquad A_z = -\frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$C_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \qquad C_z = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$E_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \qquad E_z = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

(c)

Balkenelement 1: $0 < x_1 < l$

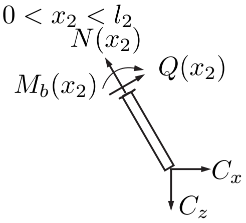


$$\begin{aligned} A_x + N(x_1) &= 0 \\ N(x_1) &= \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x_1) + A_z + q_0 x_1 &= 0 \\ Q(x_1) &= \frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2} q_0 l - q_0 x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_b(x_1) + A_z x_1 + \frac{1}{2} q_0 x_1^2 &= 0 \\ M_b(x_1) &= \frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2} q_0 l x_1 - \frac{1}{2} q_0 x_1^2 \end{aligned}$$

Balkenelement 2: $0 < x_2 < l_2$



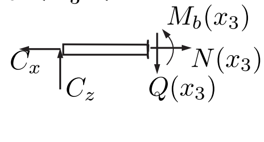
$$\begin{aligned} -N(x_2) + C_z \cos 30^\circ + C_x \cos 60^\circ &= 0 \\ N(x_2) &= -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{1}{2} \\ N(x_2) &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -Q(x_2) + C_z \sin 30^\circ - C_x \sin 60^\circ &= 0 \\ Q(x_2) &= -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Q(x_2) &= -(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} l \\ M_b(x_2) + C_z \sin 30^\circ (l_2 - x_2) - C_x \sin 60^\circ (l_2 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$M_b(x_2) =$$
$$-(-\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}) q_0 l \frac{1}{2}(l_2 - x_2) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 - x_2)$$
$$M_b(x_2) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l (\frac{2}{\sqrt{3}} l - x_2)$$

Balkenelement 3: $0 < x_3 < l$



$$N(x_3) - C_x = 0$$

$$N(x_3) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

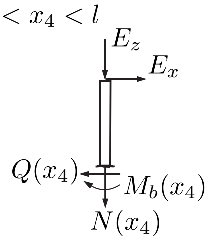
$$Q(x_3) - C_z = 0$$

$$Q(x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$M_b(x_3) - C_z x_3 = 0$$

$$M_b(x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l x_3$$

Balkenelement 4: $0 < x_4 < l$



$$N(x_4) + E_z = 0$$

$$N(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$Q(x_4) - E_x = 0$$

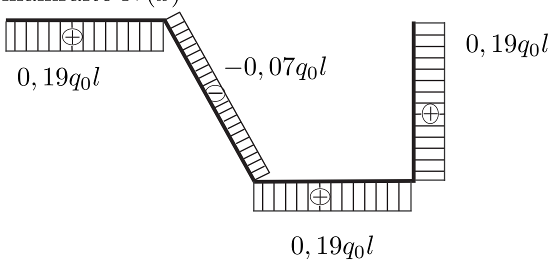
$$Q(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$M_b(x_4) + E(l - x4) = 0$$

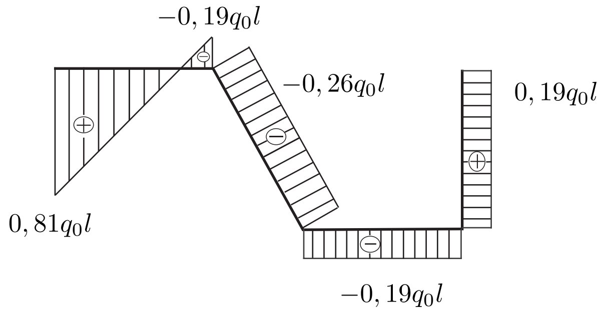
$$M_b(x_4) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l (l - x_4)$$

(d)

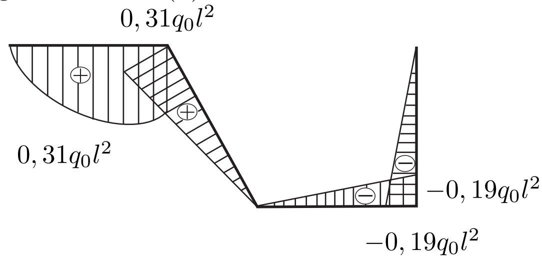
Normalkräfte $N(x)$



Querkräfte $Q(x)$

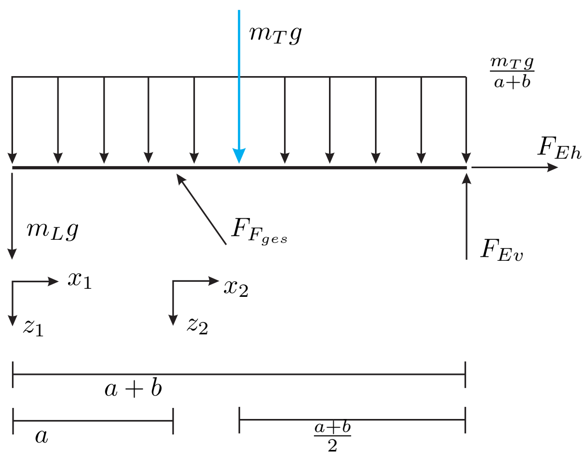


Biegemomente $M(x)$



Aufgabe 72

Freischnitt:



Lagerreaktionen:

$$\sum F_H = 0: \quad -F_{Fh} + F_{Eh} = 0 \tag{73}$$

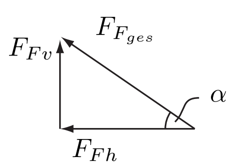
$$\sum F_V = 0: \quad -m_L g - m_T g + F_{Fv} + F_{Ev} = 0 \tag{74}$$

$$\sum M^{(E)} = 0: \quad -m_l g(a+b) - m_T g(\frac{a+b}{2}) + F_{Fv} b = 0 \tag{75}$$

$$\text{mit} \quad F_{Fv} = F_{F_{ges}} \sin\alpha \tag{76}$$

$$\text{und} \quad F_{Fh} = F_{F_{ges}} \cos\alpha \tag{77}$$

Mit der Zerlegung der Kraft:

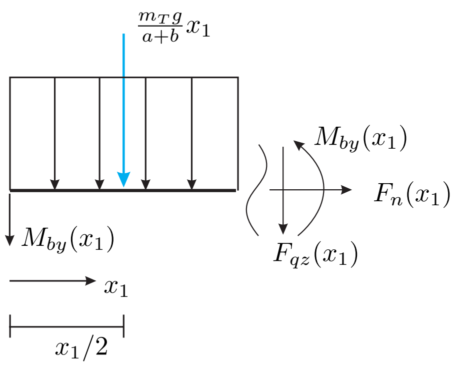


Einsetzen der Zahlenwerte und Auflösen liefert:

$$F_{Fv} \approx 2318N \tag{78}$$
$$F_{F_{ges}} \approx 2437N \tag{79}$$
$$F_{Fh} \approx 753N \tag{80}$$
$$F_{Ev} \approx -699N \tag{81}$$
$$F_{Eh} \approx 753N \tag{82}$$

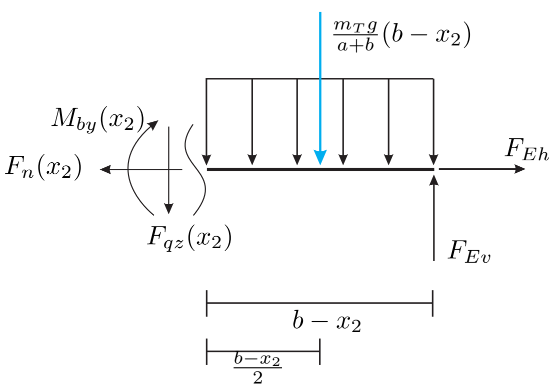
Berechnen der Schnittgrößen:

1. System:



$$\sum F_{x_1} = 0: \quad F_n = 0 \tag{83}$$
$$\sum F_{z_1} = 0: \quad -m_L g - \frac{m_T g}{a+b} x_1 - F_{qz}(x_1) = 0 \tag{84}$$
$$\Rightarrow \quad F_{qz}(x_1) = -m_L g - \frac{m_T g}{a+b} x_1$$
$$\underline{F_{qz}(x_1) = -1472N - 49\frac{N}{m} x_1} \tag{85}$$
$$\sum M_{by}^{x_1} = 0: \quad M_{by}(x_1) + m_L g x_1 + \frac{m_T g}{a+b} x_1 \frac{x_1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad M_{by}(x_1) = -m_L g x_1 - \frac{m_T g}{a+b} \frac{x_1^2}{2}$$
$$\underline{M_{by}(x_1) = -1472N x_1 - 24,5\frac{N}{m} x_1^2} \tag{86}$$

2. System:



$$\sum F_{x_2} = 0: \quad -F_n(x_2) + F_{Eh} = 0 \tag{87}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{F_n(x_2)} = F_{Eh} = \underline{753N}$$
$$\sum F_{z_2} = 0: \quad F_{Ev} - \frac{m_T g}{a+b}(x_2 - b) + F_{qz}(x_2) = 0 \tag{88}$$
$$\Rightarrow \quad F_{qz}(x_2) = -F_{Ev} + \frac{m_T g}{a+b}(x_2 - b)$$
$$\underline{F_{qz}(x_2) = 797N - 49\frac{N}{m} x_2}$$
$$\sum M_{by}^{(x_2)} = 0: \quad M_{by}(x_2) + \frac{m_T g}{a+b}(b - x_2)\frac{1}{2}(b - x_2) - F_{Ev}(x_2 - b) = 0 \tag{89}$$
$$\Rightarrow \quad M_{by}(x_2) = F_{Ev}(x_2 - b) - \frac{m_T g}{2(a+b)}(x_2^2 - 2bx_2 + b^2)$$
$$M_{by}(x_2) = -24,5\frac{N}{m} x_2^2 + 797N x_2 - 1496Nm \tag{90}$$

Skizze: