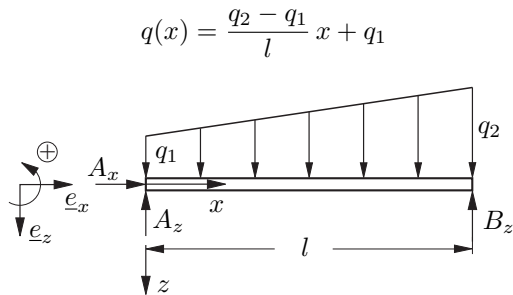


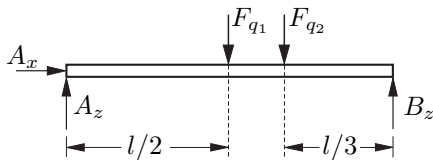
Tutorium

Aufgabe 60

Freimachsskizze:



Ersatzsystem: mit $F_{q_1} = q_1 \cdot l$
 $F_{q_2} = \frac{(q_2 - q_1) \cdot l}{2}$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad (4)$$

$$\sum M^{(A)} = 0 \Rightarrow -F_{q_1} \cdot \frac{l}{2} - F_{q_2} \cdot \frac{2}{3}l + B_z \cdot l = 0 \quad (5)$$

$$B_z = \frac{F_{q_1}}{2} + \frac{2}{3}F_{q_2} = \frac{1}{2}q_1 \cdot l + \frac{1}{3}(q_2 - q_1) \cdot l \quad (6)$$

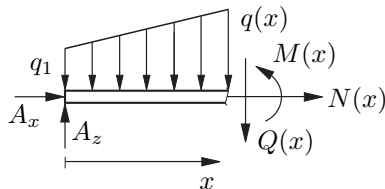
$$= \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2) \cdot l$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \Rightarrow F_{q_1} \cdot \frac{l}{2} + F_{q_2} \cdot \frac{l}{3} - A_z \cdot l = 0 \quad (8)$$

$$A_z = \frac{F_{q_1}}{2} + \frac{F_{q_2}}{3} = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2) \cdot l \quad (9)$$

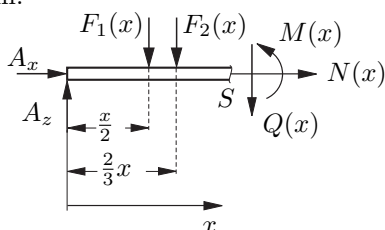
Schnittlasten:

Freischnitt:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N(x) = -A_x = 0 \quad (10)$$

Ersatzsystem:



$$F_1(x) = q_1 \cdot x \quad (11)$$

$$F_2(x) = \frac{q(x) - q_1}{2} x = \frac{q_2 - q_1}{2l} x^2 \quad (12)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_z + F_1(x) + F_2(x) + Q(x) = 0 \quad (13)$$

$$Q(x) = A_z - F_1(x) - F_2(x) \quad (14)$$

$$= -\frac{q_2 - q_1}{2l} x^2 - q_1 x + \frac{1}{6}(2q_1 + q_2) l \quad (15)$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow \quad (16)$$

$$M(x) + F_2(x) \frac{x}{3} + F_1(x) \frac{x}{2} - A_z \cdot x = 0 \quad (17)$$

$$M(x) = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2) l \cdot x - \frac{q_2 - q_1}{6l} x^3 - q_1 \frac{x^2}{2} \quad (18)$$

Lösung mit der Schnittlasten-Differentialgleichung

Für das Biegemoment $M(x)$, die Querkraft $Q(x)$ und die äußere Belastung $q(x)$ gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad .$$

Einsetzen der Streckenlast $q(x)$ führt auf

$$M(x) = \frac{q_1 - q_2}{6l} x^3 - \frac{q_1}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \quad , \quad (19)$$

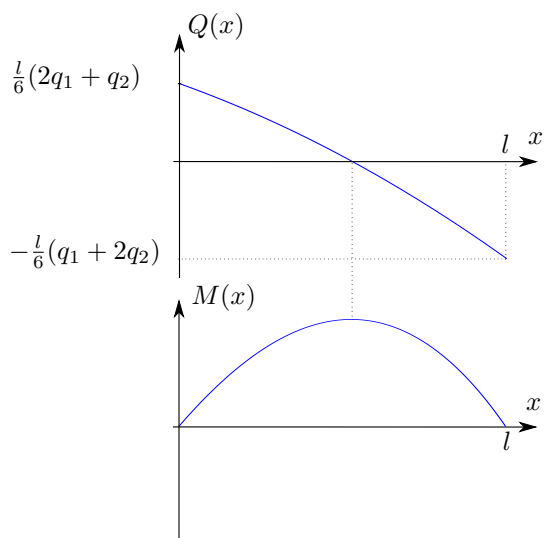
mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 . In den Punkten A und B ist der Balken gelenkig gelagert. Demnach gilt

$$M(0) = 0 \quad , \quad M(l) = 0 \quad .$$

(7) Einsetzen dieser Randbedingungen in (19) liefert das gesuchte Ergebnis

$$M(x) = \frac{(q_1 - q_2) l^2}{6} \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{q_1 l^2}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{(2q_1 + q_2) l^2}{6} \left(\frac{x}{l}\right)$$

$$Q(x) = \frac{(q_1 - q_2) l}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - q_1 l \left(\frac{x}{l}\right) + \frac{(2q_1 + q_2) l}{6} \quad .$$



Aufgabe 67

(a) Die Schnittlastendifferentialgleichungen lauten

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad . \quad (20)$$

(b) Für Träger wird in zwei Bereiche geteilt: Bereich 1 mit $0 < x < 3l$ ($x_1 \in [0, 3l]$) und Bereich 2 mit $3l < x < 5l$ ($x_2 \in [0, 2l]$). Die Teilung bei $x = 3l$ ist nötig, da dort die Streckenlast einen Sprung hat. Für die Streckenlast gilt

$$q(x_1) = \frac{q_0}{3l}x_1$$

$$q(x_2) = -q_0 \quad .$$

(c) Die Rand- und Übergangsbedingungen lauten

$$M(x_2 = 2l) = 0 \quad (21)$$

$$Q(x_2 = 2l) = 0 \quad (22)$$

$$M(x_2 = 0) = M(x_1 = 3l) \quad (23)$$

$$Q(x_2 = 0) = Q(x_1 = 3l) \quad (24)$$

Die Querkraft weist bei $x = 3l$ einen Knick auf, da dort die Streckenlast von q_0 auf $-q_0$ springt.

(d) Durch Integration von (20) im Abschnitt BC (Bereich 2) erhält man

$$Q(x_2) = q_0x_2 + C_1$$

$$M(x_2) = \frac{1}{2}q_0x_2^2 + C_1x_2 + C_2 \quad .$$

Einsetzen der Randbedingungen (21) und (22) führt auf die Gleichungen

$$0 = 2q_0l + C_1$$

$$0 = \frac{4}{2}q_0l^2 + 2C_1l + C_2$$

und schließlich auf die Konstanten

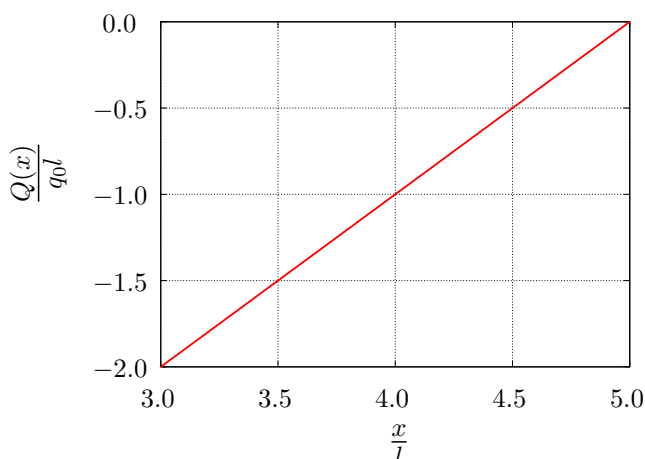
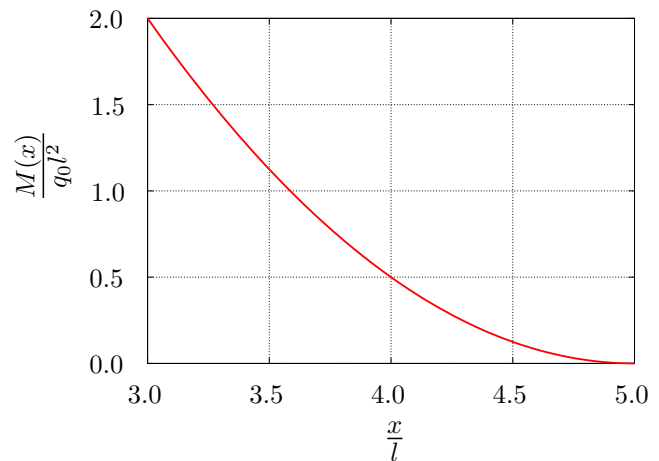
$$C_1 = -2q_0l \quad , \quad C_2 = +2q_0l^2 \quad .$$

Einsetzen ergibt

$$Q(x_2) = q_0l \left(\frac{x_2}{l} - 2 \right)$$

$$M(x_2) = q_0l^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{l} \right)^2 - 2 \frac{x_2}{l} + 2 \right) \quad .$$

(e) Die Diagramme zeigen die entsprechenden Kurven.

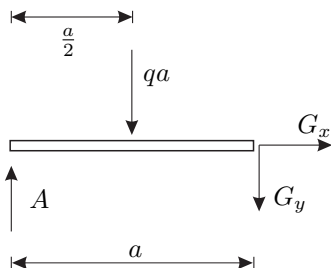


Hausaufgaben

Aufgabe 66

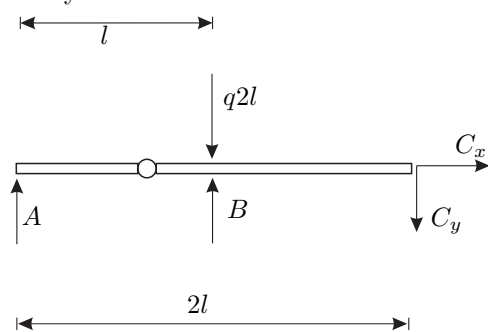
Zur Lösung der Aufgabe muss der Verlauf des Biegemomentes bestimmt werden.

Bestimmung der Auflagekräfte:
 am Teilsystem



$$\sum M^{(G)} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}qa \quad (25)$$

am Gesamtsystem:



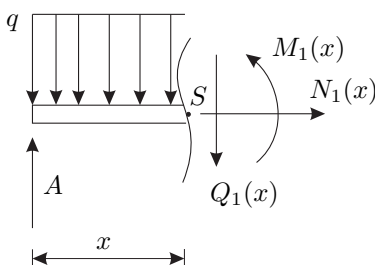
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0 \quad (26)$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \Rightarrow C_y = -A = -\frac{1}{2}qa \quad (27)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B = q(2l - a) \quad (28)$$

Biegemomentenverlauf

Abschnitt 1: $0 < x < l$

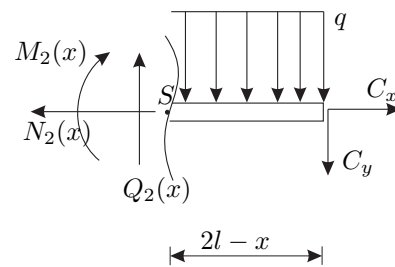


$$\sum M^{(S)} = M_1(x) - Ax + \frac{1}{2}qx^2 = 0 \quad (29)$$

$$\Rightarrow M_1(x) = Ax - \frac{1}{2}qx^2$$

$$M_1(x) = \frac{1}{2}ql^2 \left[\frac{ax}{l^2} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad (30)$$

Abschnitt 2: $l < x < 2l$



$$\sum M^{(S)} = -M_2(x) - C_y(2l - x) - \frac{1}{2}q(2l - x)^2 = 0 \quad (31)$$

$$\Rightarrow M_2(x) = \frac{1}{2}qa(2l - x) - \frac{1}{2}q(2l - x)^2$$

$$M_2(x) = \frac{1}{2}ql^2 \left[\frac{2a}{l} + \left(4 - \frac{a}{l}\right) \frac{x}{l} - 4 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad (32)$$

Maximales Biegemoment

Die Länge a kann nun so bestimmt werden, dass das maximale Biegemoment möglichst klein ist. Die notwendige Bedingung für ein lokales Maximum lautet:

$$\frac{dM}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \quad (33)$$

Im Bereich $0 \leq x < l$:

$$0 = q \left(\frac{a}{2} - x_1 \right) \quad (34)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow M(x_1) = \frac{qa^2}{8} \quad (35)$$

Im Bereich $l < x \leq 2l$:

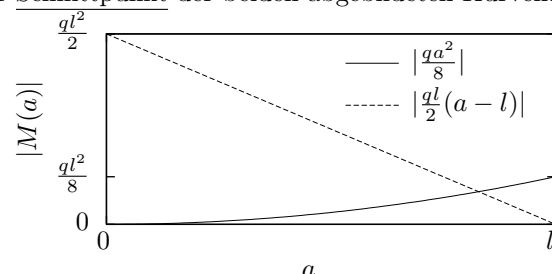
$$0 = q \left(2l - \frac{a}{2} - x_2 \right) \quad (36)$$

$$\Rightarrow x_2 = 2l - \frac{a}{2} \Rightarrow M(x_2) = \frac{qa^2}{8} \quad (37)$$

Neben lokalen Maxima im Inneren der Gebiete können auch Maxima an den Gebietsrändern bei $x = 0$, $x = l$ oder $x = 2l$ auftreten. Bei $x = 0$ sowie bei $x = 2l$ ist wegen der Gelenke das Moment Null (also sicher nicht maximal). Das Moment bei $x = l$ ist

$$M(x_3 = l) = \frac{ql}{2}(a - l) \quad (38)$$

Das maximale Biegemoment folgt je nach Wert für a entweder aus Gleichung (35) bzw. (37) oder (38). Aus der folgenden Skizze wird ersichtlich, daß das größere Biegemoment minimal ist für dasjenige a , bei dem $|\frac{qa^2}{8}|$ aus (37) und $|\frac{ql}{2}(a - l)|$ aus (38) gleich werden; gesucht ist demnach der Schnittpunkt der beiden abgebildeten Kurven.



Also gilt:

$$M_{\text{opt}} = \frac{qa_{\text{opt}}^2}{8} = \frac{ql}{2}(l - a_{\text{opt}}) \quad (39)$$

$$a_{\text{opt}}^2 + 4la_{\text{opt}} - 4l^2 = 0 \quad (40)$$

$$a_{\text{opt},1/2} = 2l(-1 \pm \sqrt{2}) \quad (41)$$

Wegen $a \geq 0$ ergibt sich als optimales Maß a (mit dem kleinsten maximalen Biegemoment):

$$a_{\text{opt}} = 2(\sqrt{2} - 1)l \approx 0,8284l. \quad (42)$$

Aufgabe 73

(a) Das Tragwerk ist statisch bestimmt gelagert.

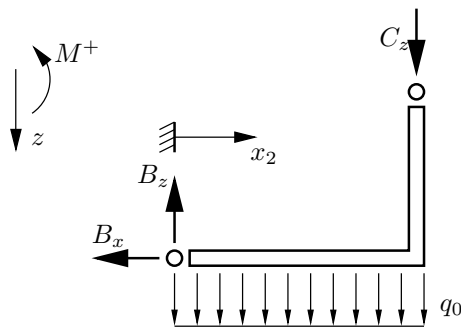
Die notwendige Bedingung für ein System starrer Körper in der Ebene

$$3n = r + v \quad (43)$$

ist erfüllt: Die Anzahl der starren Körper n ist gleich 2. Die feste Einspannung links stellt ein dreiwertiges Lager dar, das Loslager oben ist einwertig ($r = 4$). Das Gelenk in der Mitte ist zweiwertig ($v = 2$).

Hinreichend für die statische Bestimmtheit ist, dass Einbaufehler nicht zu Verspannungen führen und dass kein Teil in irgendeiner Form beweglich ist.

(b) Freischnitt des rechten Teilkörpers:



Die Linienlast q_0 kann ersetzt werden durch eine Einzelkraft $F_{q,\text{res}} = q_0a$, die in der Mitte ($x_2 = \frac{a}{2}$) angreift.

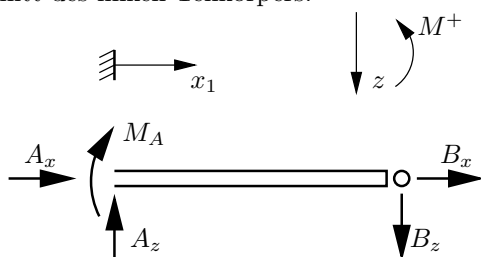
$$\sum F_x = 0 = -B_x \Rightarrow B_x = 0 \quad (44)$$

$$\sum F_z = 0 = B_z - q_0a - C_z \Rightarrow B_z = C_z + q_0a \quad (45)$$

$$\sum M^{(B)} = 0 = -aC_z - \frac{a}{2}q_0a \Rightarrow C_z = -\frac{1}{2}q_0a \quad (46)$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{1}{2}q_0a \quad (47)$$

Freischnitt des linken Teilkörpers:



$$\sum F_x = 0 = A_x + B_x \Rightarrow A_x = 0 \quad (48)$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + B_z \Rightarrow A_z = B_z = \frac{1}{2}q_0a \quad (49)$$

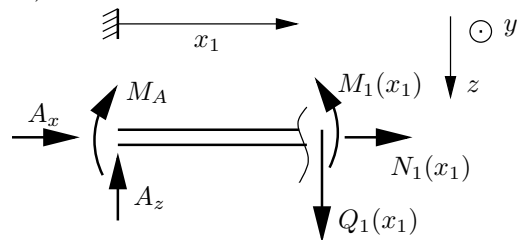
$$\sum M^{(A)} = 0 = -M_A - aB_z \Rightarrow M_A = -\frac{1}{2}q_0a^2 \quad (50)$$

Hinweis: $M^{(A)}$ bezeichnet Momente (z.B. der verschiedenen auf den Balken wirkenden Kräfte) mit dem Bezugspunkt A. M_A bezeichnet dagegen das Moment, das von der Einspannung im Punkt A auf den Balken wirkt.

(c) Schnittlasten zwischen A und B:

Ortskoordinate $x_1 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_1 :



$$\sum F_x = 0 = A_x + N_1(x_1) \Rightarrow N_1(x_1) = 0 \quad (51)$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q_1(x_1) \Rightarrow Q_1(x_1) = \frac{1}{2}q_0a \quad (52)$$

$$\sum M^{(S_1)} = 0 = M_1(x_1) - M_A - x_1A_z \quad (53)$$

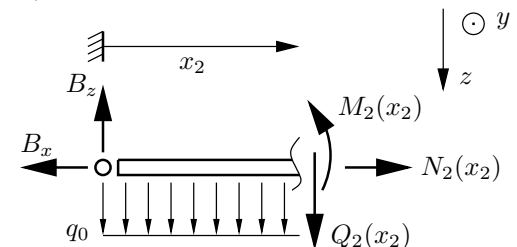
$$\Rightarrow M_1(x_1) = \frac{1}{2}q_0a^2 \left(\frac{x_1}{a} - 1 \right) \quad (54)$$

Hinweis: $M^{(S_1)}$ steht für Momente um den Schnittpunkt S_1 (Ortskoordinate x_1).

Schnittlasten zwischen B und dem Winkel zw. B u. C:

Ortskoordinate $x_2 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_2 :



$$\sum F_x = 0 = -B_x + N_2(x_2) \Rightarrow N_2(x_2) = 0 \quad (55)$$

$$\sum F_z = 0 = -B_z + Q_2(x_2) + q_0x_2 \quad (56)$$

$$\Rightarrow Q_2(x_2) = q_0 \left(\frac{a}{2} - x_2 \right) \quad (57)$$

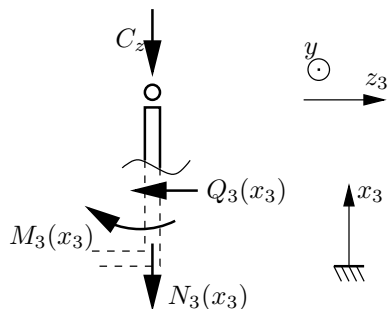
$$\sum M^{(S_2)} = 0 = M_2(x_2) + \frac{x_2}{2}q_0x_2 - x_2B_z \quad (58)$$

$$\Rightarrow M_2(x_2) = \frac{1}{2}q_0a^2 \left(\frac{x_2}{a} - \left(\frac{x_2}{a} \right)^2 \right) \quad (59)$$

Schnittlasten zwischen C und dem Winkel zw. B u. C:

Ortskoordinate $x_3 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_3 :



$$\sum F_x = 0 = -C_z - N_3(x_3) \Rightarrow N_3(x_3) = \frac{1}{2}q_0a \quad (60)$$

$$\sum F_z = 0 = -Q_3(x_3) \Rightarrow Q_3(x_3) = 0 \quad (61)$$

$$\sum M^{(S_3)} = 0 = M_3(x_3) \Rightarrow M_3(x_3) = 0 \quad (62)$$

Grafische Darstellung:

In den linken Diagrammen werden jeweils die ersten beiden Bereiche mit einer x -Koordinate zusammengefaßt:

$x_1 = x, x_2 = x - a.$

