Tutorium

Aufgabe 11

vektoriell

Kraft

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y = F \cos\alpha \underline{e}_x + F \sin\alpha \underline{e}_y \tag{1}$$

mit

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \tag{2}$$

Vektor von B (Bezugspunkt) nach A (Kraftangriffspunkt)

$$\overrightarrow{BA} = \underline{r}_{AB} = -7a\underline{e}_x - 4a\underline{e}_y \tag{3}$$

Moment mittels Kreuzprodukt

$$\underline{M} = \overrightarrow{BA} \times \underline{F} \tag{4}$$

$$= (4\cos\alpha - 7\sin\alpha)aF\underline{e}_z = -2\sqrt{5}aF\underline{e}_z \tag{5}$$

Beachte: Kreuzprodukt ist nicht kommutativ.

skalar

Hebelarm (Abstand zwischen Wirkungslinie der Kraft und dem Bezugspunkt B)

$$h = 2\sqrt{5}a \tag{6}$$

Moment (negativer Drehsinn; beachte z-Achse)

$$M = -hF = -2\sqrt{5}aF \tag{7}$$

Aufgabe 12

(a) Ortsvektoren

$$\underline{r}_{DA} = 2R\underline{e}_x + R\underline{e}_y$$
$$\underline{r}_{CA} = 2R\underline{e}_x + 3R\underline{e}_y$$
$$\underline{r}_{BA} = 3R\underline{e}_y$$

(b) vektorielle Darstellung der äußeren Kraft

$$\underline{F} = F\underline{e}_z$$

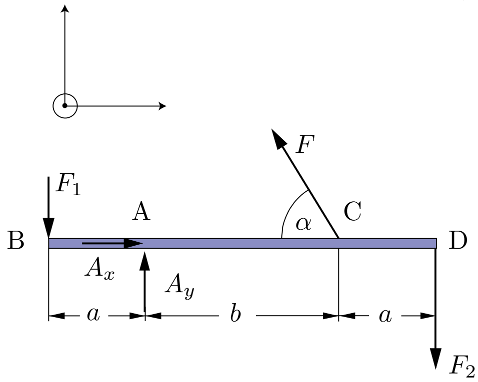
(c) Kreuzprodukt

$$\underline{r}_{DA} \times \underline{F} = \left(2R\underline{e}_x + R\underline{e}_y\right) \times F\underline{e}_z$$
$$= RF\left(-2\underline{e}_y + \underline{e}_x\right)$$

Diese physikalische Größe ist das (Kraft-)Moment der Kraft $\underline{F}$ bezüglich des Punktes A.

Aufgabe 14

(a) Das System wird am Festlager freigeschnitten, indem man zwei linear unabhängige Kräfte anträgt (Die Richtung dieser spielt hierbei keine Rolle, da das Vorzeichen am Ende die richtige Richtung der Kraft verrät).



(b) Das Momentengleichgewicht um den Punkt A wird wie folgt formuliert:

$$\sum M_z^A = F_1 a - F_2(a+b) + F\sin\alpha b = 0 \tag{8}$$

Daraus ergibt sich F zu

$$F = \frac{F_2(a+b) - F_1 a}{\sin\alpha b} = 4,5\text{kN}$$

Diese Kraft ist also nötig, um den Balken im statischen Gleichgewicht zu halten. Wird die Kraft nicht aufgebracht, beginnt das System (zumindest im ersten Moment) beschleunigt um den Lagerpunkt zu rotieren.

(c) Mit dem Wert für F können jetzt auch die Lagerreaktionen bestimmt werden. Die resultierenden Kräfte in x- und y-Richtung müssen ebenfalls verschwinden. Daher muss gelten:

$$\sum F_x = A_x - F\cos\alpha = 0 \tag{9}$$

$$\sum F_y = -F_1 + A_y - F_2 + F\sin\alpha = 0 \tag{10}$$

Aus (9) ergibt sich nach umstellen sofort

$$A_x = F\cos\alpha \approx 3,897\text{kN}$$

und aus (10)

$$A_y = F_1 + F_2 - F\sin\alpha = 0,75\text{kN}$$

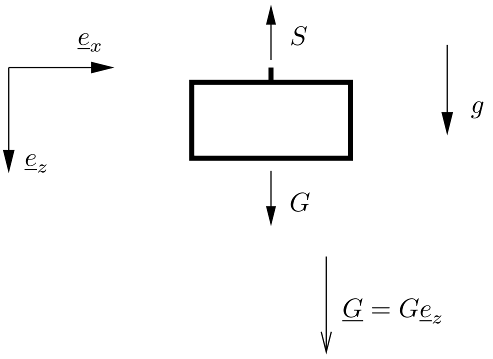
Hausaufgaben

Aufgabe 13

(a) Unter der Annahme, dass der erstgenannte Buchstabe den Urpsrung des Vektors, und der zweite Buchstabe den Punkt auf den Vektor zeigt beschreibt, ist das Ergebnis:

$$\vec{r}_{EA} = -l\vec{e}_x, \vec{r}_{EB} = -l\vec{e}_x + l\vec{e}_z, \vec{r}_{EC} = -l\vec{e}_x - l\vec{e}_z. \quad (11)$$

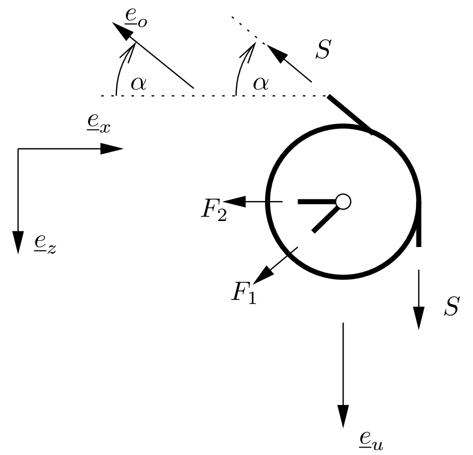
(b) Freischneiden der Last G und Darstellung der äußeren Kräfte, die an der Last wirken:



Kräftegleichgewicht in z-Richtung:

$$\sum F_z = 0 = -S + G \Rightarrow S = G = 1\text{kN} \quad (12)$$

(c) Freischnittskizze der Rolle:



Der Betrag der Seilkraft, die unten an der Rolle wirkt, ist bekannt ($S = G$). Die Richtung ist ebenfalls bekannt (entgegengesetzt zu $\underline{G}$). Das nun auch oben eine Seilkraft der Stärke S wirkt, ist anschaulich klar und kann nur mit dem Momentengleichgewicht begründet werden. Danach muss auch die Summe der Drehmomente (um den Drehpunkt der Rolle verschwinden). Nun ist also auch der Betrag und die Richtung der Seilkraft, die oben wirkt, bekannt.

Die Vektoren der Seilkräfte unterscheiden sich (obwohl ihre Beträge gleich sind). Sie unterscheiden sich in der Richtung und der Orientierung. Der Richtungsvektor der unteren Seilkraft ist (in Bezug auf das im obigen Bild gezeigte kartesische Koordinatensystem) $\underline{e}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Richtungsvektor der oberen Seilkraft ist $\underline{e}_o = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$. Man erkennt, dass $\alpha = 45°$ ist für den Fall, dass $r << l$.

Damit lassen sich die Seilkräfte (die an der Rolle wirken) beschreiben als:

$$\underline{S}_u = S\underline{e}_u = S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{S}_o = S\underline{e}_o = S\sqrt{2}/2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) Die Kräfte, die die beiden Stäbe 1 und 2 auf die Rolle ausüben, ermitteln wir aus dem Kräftegleichgewicht: Damit die Rolle in Ruhe bleibt, muß die Summe aller daran angreifenden Kräfte gleich Null sein:

$$\sum F_x = 0 = -F_2 - F_1 \cos\frac{\pi}{4} - S\cos\alpha$$

$$F_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}S \quad (13)$$

Die Summe der Kräfte in z-Richtung muss ebenfalls verschwinden:

$$\sum F_z = 0 = F_1 \sin\frac{\pi}{4} - S\sin\alpha + S$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)S$$

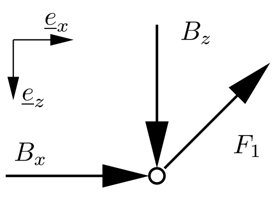
$$F_1 = (1 - \sqrt{2})S = (1 - \sqrt{2})G \approx -0{,}4142\text{kN} \quad (14)$$

Durch Einsetzen von Gl. (14) in (13) ergibt sich

$$F_2 = (-\sqrt{2} + 1)S = (1 - \sqrt{2})G \approx -0{,}4142\text{kN}$$

(e) In der Freischnittskizze sind Zugkräfte in den Stäben als positive Stabkräfte eingeführt worden. F_1 und F_2 sind aber beide negativ also ist in beiden Stäben eine Druckkraft vorhanden, die Stäbe können deshalb nicht durch ein Seil ersetzt werden.

(f) Freischneiden des Knotens B: B_x und B_z sind die Komponenten der Kraft, die das (weggeschnittene) Lager auf den Knoten B ausübt.



Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 = B_x + \frac{\sqrt{2}}{2}F_1$$

$$\sum F_z = 0 = B_z - \frac{\sqrt{2}}{2}F_1$$

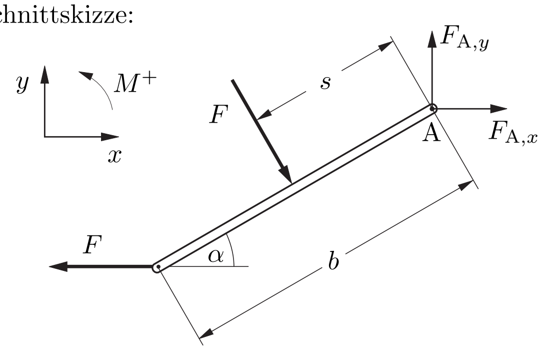
Daraus ergibt sich:

$$B_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}F_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)G \approx 0{,}2929\text{kN}$$

$$B_z = \frac{\sqrt{2}}{2}F_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)G \approx -0{,}2929\text{kN}$$

Aufgabe 15

Freischnittskizze:



Das aus der Kräftegruppe resultierende Moment bezüglich A erhält man aus der Summe der Einzelmomente, wobei M^+ den positiven Drehsinn angibt.

$$\sum M^{(\mathrm{A})} = F\,s - F\sin(\alpha)\,b \tag{15}$$

Der Hebelarm s soll nun so gewählt werden, dass das resultierende Moment bezüglich A verschwindet.

$$\sum M^{(\mathrm{A})} = F\,s - F\sin(\alpha)\,b = 0 \tag{16}$$

Die Gleichung kann nun leicht nach s umgestellt werden.

$$s = b\,\sin(\alpha) \tag{17}$$

Wie aus der Gleichung ersichtlich ist, hat die Größe der Kräfte F keinen Einfluß auf den zu bestimmenden Abstand s.

$$s = \sin(30°)\,1\mathrm{m} = 0{,}5\mathrm{m} \tag{18}$$

Die Lagerreaktionen $F_{\mathrm{A},x}$ und $F_{\mathrm{A},y}$ folgen aus den Kräftegleichgewichten:

$$\sum_i F_{i,x} = F_{\mathrm{A},x} - F + F\sin(\alpha) \overset{!}{=} 0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow F_{\mathrm{A},x} = F\,(1-\sin(\alpha)) = \frac{F}{2} \tag{20}$$

$$\sum_i F_{i,y} = F_{\mathrm{A},y} - F\cos(\alpha) \overset{!}{=} 0 \tag{21}$$

$$\Rightarrow F_{\mathrm{A},y} = F\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}F}{2} \tag{22}$$

Aufgabe 18

(a) Die resultierende Kraft des räumlichen Kraftsystems ergibt sich aus der Vektoraddition der Kraftvektoren $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ und $\underline{F}_3$

$$\underline{F}_{res} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \tag{23}$$

$$\underline{F}_{res} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} \tag{24}$$

Der Betrag der resultierenden Kraft ist der Betrag dieses Vektors

$$F_{res} = \left|\underline{F}_{res}\right| = \sqrt{3F^2} = \sqrt{3}F \tag{25}$$

(b) Das geforderte Vektorprodukt entspricht dem auf den Koordinatenursprung bezogene Moment. Dieses entspricht der Summe der Einzelmomente im Koordinatenursprung die durch die drei Kräfte verursacht werden.

$$\begin{aligned}
\underline{r}_{\mathrm{res}} \times \underline{R} &= \underline{M}^{(0)}_{res} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \underline{r}_i \times \underline{F}_i \\
&= \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -aF \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2aF \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -aF \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r}_{\mathrm{res}} \times \underline{R} = aF \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Achtung: Den Abstandsvektor der Resultierenden zum Ursprung erhält man <u>nicht</u> durch Summation der einzelnen Koordinaten, sondern über das Momentengleichgewicht.
