Tutorium

Aufgabe 1

Funtionen*dummy* einer linearen Funktion:

$$\underline{f(x) = mx + n.} \tag{1}$$

Dabei entspricht m der Steigung der Geraden $f(x)$ und n einer Verschiebungskonstante. Damit sind also zwei unbekannte Größen (m, n) zu ermitteln. Dies erfolgt durch Anpassen an gegeben Werte (meist Randwerte):

$$f_1(x=0) = m \cdot 0 + n = n \overset{!}{=} q_0 \quad \Rightarrow n = q_0 \tag{2}$$

$$f_1(x=a) = m \cdot a + n = ma + n \overset{!}{=} q_1 \tag{3}$$

$$\Rightarrow m = \underbrace{\frac{q_1 - q_0}{a}}_{\text{mit } q_1 < q_0 \Rightarrow \text{negative Steigung}} \tag{4}$$

Damit ist also:

$$f_1(x) = \frac{q_1 - q_0}{a} x + q_0 \tag{5}$$

Funtionen*dummy* einer quadratischen Funktion:

$$\underline{f(x) = px^2 + qx + r.} \tag{6}$$

Es sind also drei Faktoren (p, q, r) unbestimmt.

Bei $x = 0$ findet man:

$$f_2(x=0) = p \cdot 0^2 + q \cdot 0 + r \overset{!}{=} q_1 \quad \Rightarrow r = q_1 \tag{7}$$

Keine Steigung bei $x = a/2$

$$f_2'(x = a/2) := \frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=a/2} = (2px + q)|_{x=a/2} \tag{8}$$

$$= 2p\frac{a}{2} + q \overset{!}{=} 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow q = -pa \tag{10}$$

$$f_2(x = a/2) = p\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q\frac{a}{2} + r = pa^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + q_1 \overset{!}{=} q_0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow p = -4\frac{q_0 - q_1}{a^2} \tag{12}$$

Man findet also:

$$f_2(x) = -4\frac{q_0 - q_1}{a^2}\left(x^2 - xa\right) + q_1 \tag{13}$$

Funtionen*dummy* einer Sinusfunktion:

$$\underline{f(x) = A\sin(\omega x + \phi) + B.} \tag{14}$$

B ist die Veschiebung parallel zur x-Achse und daher ist $B = q_1$.
A ist die Amplitude und damit gilt $A = q_0 - q_1$.
omega ist die Schwingfrequenz, Sie ergibt sich aus $T = \frac{2\pi}{\omega}$, wobei T die Periode der Funktion ist. Daher ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2a \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{a} \tag{15}$$

Schließlich ist ϕ die Phasenverschiebung. Es gilt

$$f(x_0) = A\sin(\omega x_0 + \phi) + B = B. \tag{16}$$

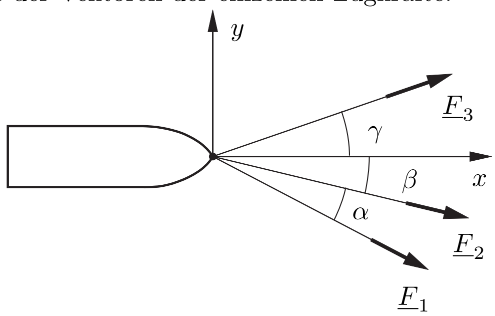
Daher muss gelten, dass $\omega x_0 + \phi = \pi$ ist. Für die dargestellte Funktion ist $x_0 = \frac{a}{2}$ und damit ergibt sich $\phi = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Funktion ist damit

$$f_3(x) = (q_0 - q_1)\sin(\frac{\pi}{a}x + \frac{\pi}{2}) + q_1 \tag{17}$$

$$= (q_0 - q_1)\cos(\frac{\pi}{a}x) + q_1\,. \tag{18}$$

Aufgabe 3

Der Vektor der resultierenden Zugkraft $\underline{F}_{res}$ ist gleich der Summe der Vektoren der einzelnen Zugkräfte.



$$\underline{F}_{res} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \tag{19}$$

Die x- und y-Komponenten der Einzelkräfte berechnen sich wie folgt:

$$F_{1,x} = F\cos(\alpha+\beta) \qquad F_{1,y} = -F\sin(\alpha+\beta)$$
$$F_{2,x} = F\cos\beta \qquad F_{2,y} = -F\sin\beta$$
$$F_{3,x} = F\cos\gamma \qquad F_{3,y} = F\sin\gamma$$

Eingesetzt in Gleichung (19):

$$\begin{aligned}\underline{F}_{res} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \\ &= (F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x})\underline{e}_x + (F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y})\underline{e}_y \\ &= F\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos\beta + \cos\gamma\big)\underline{e}_x \\ &\quad + F\big(-\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta + \sin\gamma\big)\underline{e}_y \\ &\approx 56{,}616\text{kN } \underline{e}_x - 5{,}085\text{kN } \underline{e}_y\end{aligned}$$

Die resultierende Kraft aller drei Schlepper ist der Betrag dieses Vektors:

$$\begin{aligned}F_{res} = |\underline{F}_{res}| &= \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2} \\ &\approx 56{,}844\text{kN}\end{aligned}$$

Der Winkel δ, den die resultierende Kraft F_{res} mit der x-Achse einschließt ergibt sich aus

$$\tan\delta = \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}$$

$$\delta = \arctan(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}) \tag{20}$$

$$\approx -5{,}1^\circ \tag{21}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Zuerst werden die Vektoren mit den Beträgen F_1 bis F_4 mathematisch beschrieben. Dazu kann man die Darstellung

$$\vec{F}_i = F_i \vec{e}_i \tag{22}$$

verwenden, wobei $\vec{e}_i$ den normierten Richtungsvektor des Vektors $\vec{e}_i$ mit Betrag F_i repräsentiert. Der Richtungsvektor des Vektors $\vec{F}_i$ lässt sich gemäß der Aufgabenstellung aus den Differenzvektoren

$$\vec{r}_{i5} := \overrightarrow{P_5 P_i} = \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_5} \tag{23}$$

berechnen, die durch Ihren Betrag

$$|\vec{r}_{i5}| = \sqrt{r_{i5,x}^2 + r_{i5,y}^2} \tag{24}$$

dividiert werden müssen, um Einheitsvektoren zu sein. Folglich gilt:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{r}_{i5}}{|\vec{r}_{i5}|} \tag{25}$$

Diese Rechnung ergibt für das konkrete Beispiel:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{15} &:= \overrightarrow{P_5 P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_5} = 4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y \\
|\vec{r}_{15}| &= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \\
\vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{25} &:= \overrightarrow{P_5 P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_5} = 1\vec{e}_x + 6\vec{e}_y \\
|\vec{r}_{25}| &= \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37} \\
\vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{37}}\vec{e}_x + \frac{6}{\sqrt{37}}\vec{e}_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{35} &:= \overrightarrow{P_5 P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_5} = -3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y \\
|\vec{r}_{35}| &= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \\
\vec{e}_3 &= -\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{e}_x + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{e}_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{45} &:= \overrightarrow{P_5 P_4} = \overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_5} = -5\vec{e}_x - 1\vec{e}_y \\
|\vec{r}_{45}| &= \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \\
\vec{e}_4 &= -\frac{5}{\sqrt{26}}\vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{26}}\vec{e}_y
\end{aligned}$$

Der (resultierende) Summenvektor ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{res} &= \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3 + F_4\vec{e}_4 \\
&\approx -52,27\vec{e}_x + 86,49\vec{e}_y
\end{aligned}$$

mit dem Winkel

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}} \\
\alpha &\approx 121,15^\circ
\end{aligned}$$

Hinweis: Eintippen in den Taschenrechner liefert zunächst $\alpha = -58,85^\circ$. Am Vorzeichen der Komponenten des Summenvektors sieht man aber, dass er in den 2. Quadranten zeigt, und damit kann nur $\alpha = -58,85^\circ + 180^\circ = 121,15^\circ$ der richtige Winkel sein. Beide Werte liefern den gleichen tan-Wert.

Aufgabe 7

(a) Kräfte in vektorieller Schreibweise

$$\underline{F}_1 = -F_1 \cos\alpha \underline{e}_x + F_1 \sin\alpha \underline{e}_y$$
$$\underline{F}_2 = F_2 \cos\beta \underline{e}_x + F_2 \sin\beta \underline{e}_y$$

(b) resultierende Kraft

$$\begin{aligned}\underline{F} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 \\ &= (-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta)\, \underline{e}_x + (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)\, \underline{e}_y\end{aligned}$$

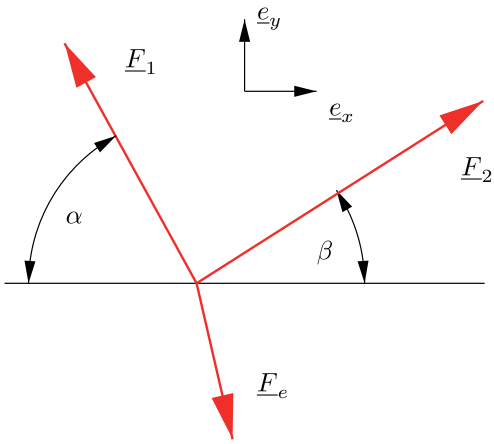
Betrag

$$\begin{aligned}F &= |\underline{F}| \\ &= \sqrt{(-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta)^2 + (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)^2}\end{aligned}$$

Richtung (Winkel γ gegenüber der positiven x-Richtung)

$$\tan\gamma = \frac{F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta}{-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta}$$

(c) Lagerkraft



$$\begin{aligned}\underline{F}_e &= -\underline{F} \\ &= (F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta)\, \underline{e}_x - (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)\, \underline{e}_y\end{aligned}$$

(d) Damit Lagerkraft nur in y-Richtung wirkt, muss die x-Komponente der Kraft verschwinden:

$$F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{F_2}{F_1} \cos\beta$$

Zahlenwerte: $\alpha \approx 46^o$