Tutorium

Aufgabe 155

Differentialgleichung für das Knickproblem:

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit } \lambda^2 = \frac{F}{EI} \tag{1}$$

Allg. Lösung:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \tag{2}$$

(a)

$$w(l) = 0 \qquad M(l) = 0 \tag{3}$$
$$\varphi(0) = 0 \qquad Q(0) = kw(0) \tag{4}$$

(b) Mit den Abkürzungen

$$c := \cos\lambda l\ , \quad s := \sin\lambda l \tag{5}$$

ergibt sich aus den Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} c & s & \lambda l & 1 \\ c & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & -EI\lambda^3 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Nichttriviale Lösung aus $\det M = 0$:

$$-k\sin(\lambda l) + (\lambda lk - EI\lambda^3)\cos(\lambda l) = 0 \tag{7}$$

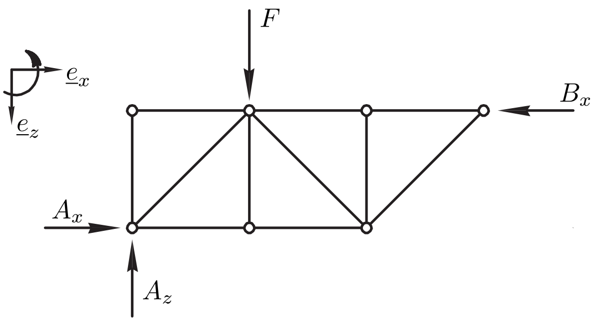
(c) $k \to 0$:

$$\cos(\lambda l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2l} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2} \tag{8}$$

Aufgabe 153

(a) Bestimmung der Lagerreaktionen

Freischnitt:



$$\sum M^{(A)} = 0 = -Fa + B_x a \qquad \Rightarrow \underline{B_x = F} \tag{9}$$
$$\sum F_x = 0 = A_x - B_x \qquad \Rightarrow \underline{A_x = B_x = F} \tag{10}$$
$$\sum F_z = 0 = F - A_z \qquad \Rightarrow \underline{A_z = F} \tag{11}$$

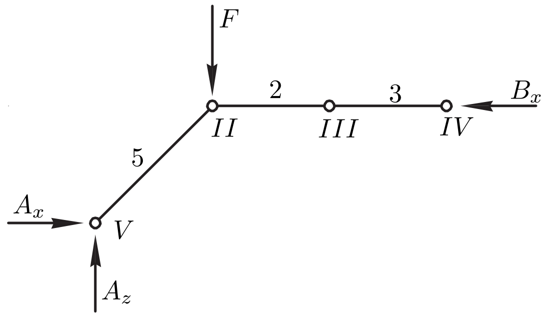
(b) Bestimmung der Stabkräfte:

offensichtliche Nullstäbe:

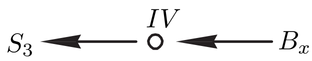
1,4,6,7,8,9,10,11

(1,4 da Knoten I unbelastet; 6 da an Knoten VI die Stäbe 10 und 11 in die gleiche Richtung zeigen; 8 da an Knoten III die Stäbe 2 und 3 in die gleiche Richtung zeigen; 9 da an Knoten IV die Lagerkraft B_x in Richtung des Stabes 3 weist; 7,11 da Knoten VII jetzt unbelastet ist; 10 ist jetzt am Konten VI frei)

Freischnitt des verbleibenden Systems:



Knoten IV:

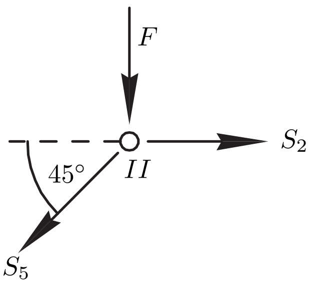


$$\sum F_x = 0 = -S_3 - B_x \qquad \Rightarrow \underline{S_3 = -B_x = -F} \tag{12}$$

Knoten III:

$$\sum F_x = 0 = -S_2 + S_3 \qquad \Rightarrow \underline{S_2 = S_3 = -F} \tag{13}$$

Knoten II:



$$\sum F_x = 0 = S_2 - S_5\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \quad \underline{S_5 = S_2\sqrt{2} = -F\sqrt{2}} \tag{14}$$

(c) Knickproblem
<u>Lösungsvariante 1:</u>

Druckstäbe	Länge
$S_2 = -F$	a
$S_3 = -F$	a
$S_5 = -\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}a$

(15)

Bestimmung der kritischen Last F_{krit}:
Die Druckbelastung der Stäbe in einem Fachwerk entspricht der Belastung des Euler-Knickstabes der Länge l mit Fest-Los-Lagerung.

$$\Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = EI\frac{\pi^2}{l_r^2}$$

mit $l_r = l$

- F_{krit} für Stäbe 2 und 3:

$$F_{\text{krit}} = EI\frac{\pi^2}{a^2}$$

- F_{krit} für Stab 5:

$$F_{\text{krit}} = EI\frac{\pi^2}{2a^2}$$

Stab 5 würde zuerst ausknicken, da er am am stärksten belastet wird und er auch der längste Stab ist.

Lösungsvariante 2:

Differentialgleichung für das Knickproblem:

$$w'''' + k^2 w'' = 0 \qquad \text{mit} \quad k^2 = \frac{F}{EI} \tag{16}$$

allgemeine Lösung

$$w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 x + C_4 \tag{17}$$
$$w'(x) = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx + C_3 \tag{18}$$
$$w''(x) = -C_1 k^2 \cos kx - C_2 k^2 \sin kx \tag{19}$$

Randbedingungen:

$$w''(0) = 0 \Rightarrow -C_1 k^2 = 0 \qquad \Rightarrow \underline{C_1 = 0} \tag{20}$$
$$w(0) = 0 \qquad \Rightarrow \underline{C_4 = -C_1 = 0} \tag{21}$$
$$w(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin kx + C_3 l = 0 \tag{22}$$
$$w''(l) = 0 \Rightarrow -C_2 k^2 \sin kl = 0 \tag{23}$$

$C_2 = 0$ würde die Gleichung erfüllen, jedoch ergäbe sich dann über Gleichung (22) auch C_3 zu Null. Das stellt somit die triviale Lösung $w(x) = 0$ dar, welche hier nicht untersucht werden soll. Es muß vielmehr gelten:

$$\sin kl = 0 \tag{24}$$
$$\Rightarrow kl = n\pi \qquad \text{mit } n = 0, 1, 2... \tag{25}$$

Dabei ergibt sich für $k = 0$ über Gleichung (16) auch die Belastung F zu Null. Stattdessen soll hier der Fall $n = 1$ untersucht werden, da er die kleinste kritische Last F_{krit} zur Folge hat. Es folgt somit für $n = 1$:

$$\Rightarrow k = \frac{\pi}{l} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

mit Gleichung (16) ergibt sich:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{F_{krit}}{EI} \Rightarrow F_{krit} = EI\frac{\pi^2}{l^2} \tag{28}$$

mit der Länge $l = \sqrt{2}a$ gilt:

$$F_{krit} = EI\frac{\pi^2}{2a^2} \tag{29}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 148

Allgemeine Differentialgleichung für Knickung:

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

Ihre allgemeine Lösung:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \tag{30}$$

wir benötigen davon die erste und dritte Ableitung:

$$w'(x) = -A\lambda \sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda \tag{31}$$
$$w'''(x) = A\lambda^3 \sin\lambda x - B\lambda^3 \cos\lambda x \tag{32}$$

Die zu diesem Problem gehörigen Randbedingungen lauten (vgl. Skizze in der Aufgabenstellung):

$$w(x=0) = 0 \tag{33}$$
$$w'(x=0) = 0 \tag{34}$$
$$w'(x=l) = 0 \tag{35}$$
$$Q(x=l) = 0 = w'''(x=l) \quad Q = \text{Querkraft} \tag{36}$$

Aus Gl. (30) und Gl. (33) ergibt sich Gl. (37), aus Gl. (31) und Gl. (34) ergibt sich Gl. (38):

$$A + D = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad D = -A \tag{37}$$
$$\lambda B + \lambda C = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad B + C = 0 \tag{38}$$

Gl. (31) mit Gl. (35) ergibt Gl. (39) und Gl. (32) mit Gl. (36) Gl. (40):

$$-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C = 0 \tag{39}$$
$$A\sin\lambda l - B\cos\lambda l = 0 \tag{40}$$

Addition von Gl. (39) und Gl. (40) ergibt mit Gl. (38):

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0\,. \tag{41}$$

Mit Gl. (41) und Gl. (37) lassen sich aus Gl. (40) die Knickbedingung Gl. (42) (Eigenwertgleichung) und aus Gl. (30) die spezielle Lösung unseres Problems Gl. (43) (die Eigenform) bestimmen:

$$A\sin\lambda l = 0 \tag{42}$$
$$w(x) = A(\cos\lambda x - 1) \tag{43}$$

Eine sinnvolle Lösung findet sich mit $A \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ aus Gl. (42):

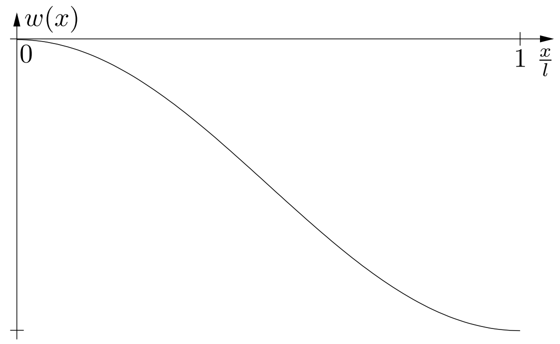
$$\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \lambda_n = n\frac{\pi}{l} \text{ mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Der kleinste Eigenwert λ_1 liefert die kritische Last:

$$\lambda_1^2 = \frac{F_{\text{krit}}}{EI} \quad \Rightarrow F_{\text{krit}} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI$$

Die zugehörige Eigenform lautet (aus Gl. (43)):

$$w(x) = A\Big(\cos\big(\pi\frac{x}{l}\big) - 1\Big)$$



Aufgabe 154

(a) Eulersche Differentialgleichung fürs Knicken:

$(EIw^{''})^{''} + Fw^{''} = 0$
$w^{IV} + \lambda^2 w^{''} = 0$ mit $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$

(b) Die Kraft aus der Temperaturerhöhung:

$\sigma_D = E\alpha_T \Delta T$
$F_D = EA_s \alpha_T \Delta T$

(c)

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \qquad (44)$$

$$w^{'}(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda \qquad (45)$$

$$w^{''}(x) = -A\lambda^2\cos\lambda x - B\lambda^2\sin\lambda x = -\frac{1}{EI}M(x) \qquad (46)$$

$$w^{'''}(x) = A\lambda^3\sin\lambda x - B\lambda^3\cos\lambda x = -\frac{1}{EI}Q(x) \qquad (47)$$

Die Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \qquad (48)$$

$$w^{'}(0) = 0 \qquad (49)$$

$$w^{'}(l) = 0 \qquad (50)$$

$$Q(l) = 0 = -EIw^{'''}(l) = 0 \qquad (51)$$

aus 48 folgt: $A + D = 0 \Rightarrow D = -A$
aus 49 folgt: $B + C = 0 \Rightarrow C = -B$
aus 50 folgt: $-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C \quad = 0$
aus 51 folgt: $A\sin\lambda l - B\cos\lambda l \quad = 0$

Es läßt sich also das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -\sin\lambda l & \cos\lambda l - 1 \\ \sin\lambda l & -\cos\lambda l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aufstellen. Das System hat eine nichttriviale Lösung für

$$\det \begin{bmatrix} -\sin\lambda l & \cos\lambda l - 1 \\ \sin\lambda l & -\cos\lambda l \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Es bleibt $\quad \sin\lambda l = 0$.
Die Lösung lautet also $\lambda l = n\pi$,
wobei das kleinst mögl. n = 1 ist.

Die kritische Kraft: $F_{krit} = EI\lambda^2 = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$

(d) Die kritische Temperatur:

$\Delta T_{krit} = \frac{F_{krit}}{EA_s\alpha_T}$

$T_2 = T_1 + \Delta T_{krit}$

$T_2 = T_1 + \frac{I\pi^2}{A_s l^2 \alpha_t}$