# Tutorium

### Aufgabe 139

Vorbetrachtung: Der eingeprägte Spannungszustand im Element wird durch die Größen $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$ und $\tau_{xy}$ beschrieben. Es gelten folgende allgemeine Beziehungen:

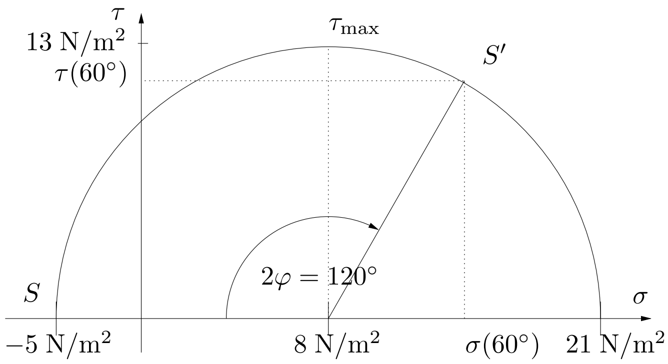
$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \tag{1}$$

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \tag{2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \tag{3}$$

**(a)** Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises und grafische Lösung:

1. Koordinatensytem zeichnen: Horizontal die $\sigma$-Achse; vertikal die $\tau$-Achse. $\sigma_{xx}$ und $\sigma_{yy}$ auf der $\sigma$-Achse eintragen.
2. $\tau_{xy}$ positiv über $\sigma_{xx}$ und negativ unter $\sigma_{yy}$ abtragen. Die entstandenen Endpunkte miteinander verbinden und diese Strecke als Durchmesser des Kreises identifizieren. Der Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen $\sigma_{xx}$ und $\sigma_{yy}$ auf der $\sigma$-Achse.
3. Kreisbogen um den Mittelpunkt schlagen.
4. Trage den Winkel $2\varphi$ vom Punkt S (Spannung im Schnitt senkrecht zur $x$-Achse) zum Punkt S' im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) um den Mittelpunkt an.
5. $\sigma$ und $\tau$ am Punkt S' ablesen.




Der Mohrschen Spannungskreis (Mittelpunkt und Durchmesser) kennzeichnet einen bestimmten Spannungszustand.[1]

Ein bestimmter Punkt am Umfang des Kreises bezeichnet die Spannungen im Schnitt unter einem bestimmten Schnittwinkel:[2]

Der Punkt S mit $\sigma = \sigma_{xx} = -5\,\text{N/m}^2$, $\tau = \tau_{xy} = 0$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt senkrecht zur $x$-Achse.

[1]Der Spannungszustand ist objektiv im Material vorhanden, unabhängig davon, wie der Beobachter sich einen Schnitt durch das Material denkt.

[2]Die Spannungen in einem gedachten Schnitt hängen von der Orientierung des gedachten Schnitts bzw. der Wahl des Koordinatensystems ab.

Der Punkt S' mit $\sigma = \sigma(\varphi)$, $\tau = \tau(\varphi)$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt unter dem Winkel $\varphi$ zur $x$-Achse.

Hier lesen wir ab:

$$\sigma(\varphi = 60^\circ) = 14{,}5\,\text{N/m}^2$$
$$\tau(\varphi = 60^\circ) = 11{,}25\,\text{N/m}^2$$

Rechnerische Lösung:

Normalspannung:

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \tag{4}$$

$$\text{hier:} \quad \sigma(\varphi) = \boxed{14{,}5\,\text{N/m}^2} \tag{5}$$

Schubspannung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \tag{6}$$

$$\text{hier:} \quad \tau(\varphi) = \boxed{11{,}25\,\text{N/m}^2} \tag{7}$$

**(b)** $\tau_{\max} =?$; $\varphi(\tau_{\max}) =?$:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \tag{8}$$

$$\text{hier:} \quad \tau_{\max} = \boxed{13\,\text{N/m}^2} \tag{9}$$

Der zugehörige Winkel ergibt sich aus der Skizze des Mohrschen Kreises bzw. aus der Gleichung für die Schubspannung:

aus der Skizze:

$$\varphi(\tau_{\max}) = +45^\circ$$

Aus der notw. Bed. für ein Extremum erhält man:

$$\frac{\partial \tau(2\varphi)}{\partial (2\varphi)} \stackrel{!}{=} 0 \tag{10}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \tag{11}$$

hier

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \Longrightarrow \boxed{\varphi = \tfrac{\pi}{4} \pm n\tfrac{\pi}{2}}$$

**(c)** Hauptspannungen: Aus der Skizze liest man ab, dass die Richtungen, unter denen die Schubspannungen verschwinden, senkrecht aufeinander stehen. Außerdem liest man aus Skizze ab:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma_{yy} = 21\,\text{N/m}^2 \text{ bei } 2\varphi = 180^\circ$$
$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \sigma_{xx} = -5\,\text{N/m}^2 \text{ bei } 2\varphi = 0^\circ$$

oder

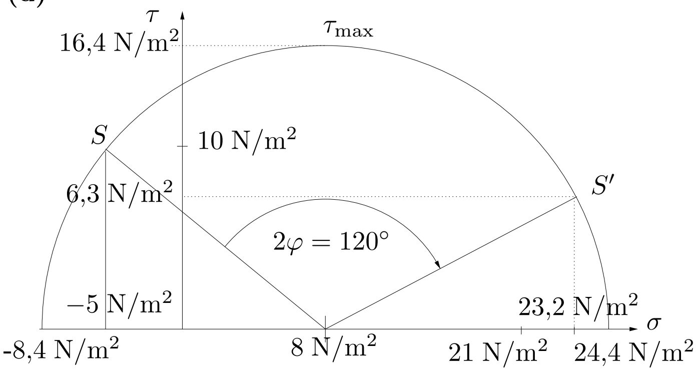
$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2}} \tag{12}$$

Hauptspannungen = Mittelpunkt ± Radius

hier: $\tau_{xy} = 0$ und damit:

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_{xx}} \quad \text{und} \quad \boxed{\sigma_2 = \sigma_{yy}} \quad \text{s.o.} \tag{13}$$

**(d)**




Alles nochmals speziell für $\sigma_{xx} = -5\,\text{N/m}^2$, $\sigma_{yy} = 21\,\text{N/m}^2$, $\tau_{xy} = 10\,\text{N/m}^2$ liefert

$$\begin{aligned}
\sigma(2\varphi = 120^\circ) &= 23{,}16\ \text{N/m}^2 \\
\tau(2\varphi = 120^\circ) &= 6{,}26\ \text{N/m}^2 \\
\sigma_1 &= 24{,}4\ \text{N/m}^2 \\
\sigma_2 &= \text{-}8{,}4\ \text{N/m}^2 \\
\tau_{\max} &= 16{,}4\ \text{N/m}^2
\end{aligned}$$

$\varphi$ für Hauptnormalspannungen ?
Bedingung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

$\Longrightarrow \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = \frac{20}{-5-21} = -\frac{20}{26}$
$\Longrightarrow 2\varphi = \text{-}37{,}6^\circ + n\pi \Longrightarrow \boxed{\varphi = \text{-}18{,}8^\circ + n\frac{\pi}{2}}$

Hauptspannungen und zugehörige Winkel:

$$(\sigma_{\min} = \text{-}8{,}4\ \text{N/m}^2; -18,8^\circ) \tag{14}$$

$$(\sigma_{\max} = 24{,}4\ \text{N/m}^2; +71,2^\circ) \tag{15}$$

Gesucht ist nun $\varphi$ für $\tau_{\max}$:

$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \tag{16}$$

$$= \frac{26}{20} \tag{17}$$

Da nur das Maximum gesucht ist:

$$2\varphi = 52{,}4^\circ + n2\pi \tag{18}$$

$$\varphi = 26{,}2^\circ + n\pi \tag{19}$$

## Aufgabe 140

### (a) Maximale Schubspannungen

Unter Beachtung der Schnittlastenkonvetion wird identifiziert:

$$\sigma_x = \sigma_0, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\sigma_0, \qquad \sigma_y = -\frac{\sigma_0}{2} \tag{20}$$

Für die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ ergibt sich:

$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{21}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_0+\frac{1}{2}\sigma_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\sigma_0\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{9}{16}\sigma_0^2 + \frac{27}{16}\sigma_0^2}$$

$$= \underline{\underline{\pm\frac{3}{2}\sigma_0}} \tag{22}$$

### (b) Hauptspannungen und -richtungen

$$\sigma_{I/II} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{23}$$

$$= \frac{\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_0}{2} \pm \frac{3}{2}\sigma_0$$

$$\Rightarrow \sigma_I = \underline{\underline{\frac{7}{4}\sigma_0}} \tag{24}$$

$$\sigma_{II} = \underline{\underline{-\frac{5}{4}\sigma_0}} \tag{25}$$

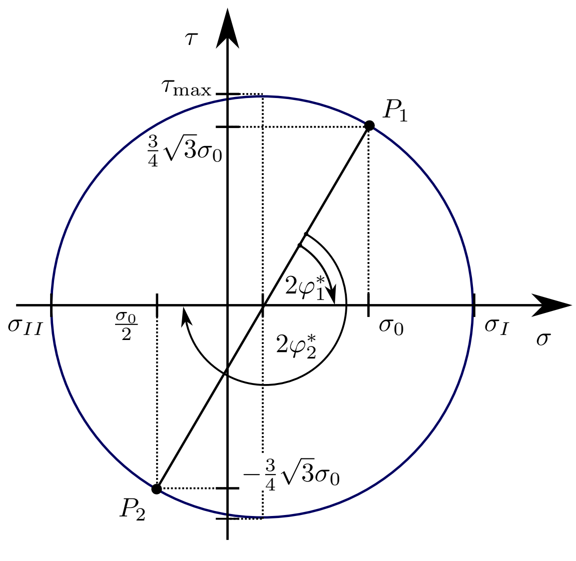
$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{26}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}\sigma_0}{\frac{3}{2}\sigma_0} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2\varphi_1^* = 60^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_1^* = 30^\circ}} \tag{27}$$

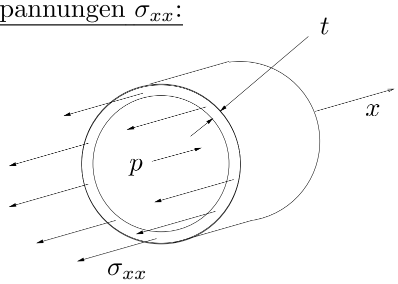
$$\Rightarrow 2\varphi_2^* = 240^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_2^* = 120^\circ}} \tag{28}$$

### (c) Mohrscher Kreis



**Aufgabe 141**

**(a)** Längsspannungen $\sigma_{xx}$:




Kreisringfläche:

$$\begin{aligned}
A_K &= \pi(r_a^2 - r_i^2) \quad \text{mit} \quad r_a = R + t; \quad r_i = R \\
&= \pi(r_a - r_i)(r_a + r_i) \\
&= \pi(R + t - R)(R + t + R) = \pi t(2R + t) \\
A_K &= 2\pi R t + \pi t^2 \approx 2\pi R t \quad \text{für} \quad t \ll l, t \ll R
\end{aligned}$$

Deckelfläche:

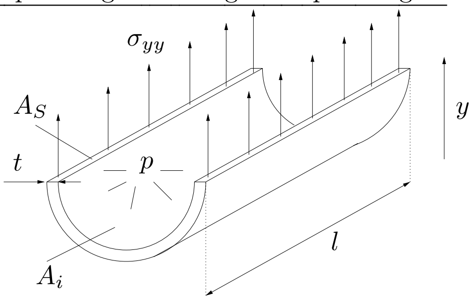
$$A_D = \pi r_i^2 = \pi R^2$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 &= -\sigma_{xx} A_K + p A_D \\
0 &= -\sigma_{xx} 2\pi R t + p \pi R^2 \\
\Longrightarrow & \boxed{\sigma_{xx} = \frac{1}{2}\frac{R}{t} p}
\end{aligned}$$

mit $t = 1 \cdot 10^{-3}$m; $p = 2 \cdot 10^5$N/m$^2$; $R = \frac{1}{2}$m folgt $\sigma_{xx} = 5 \cdot 10^7$N/m$^2$

Umfangsspannungen = Tangentialspannungen:



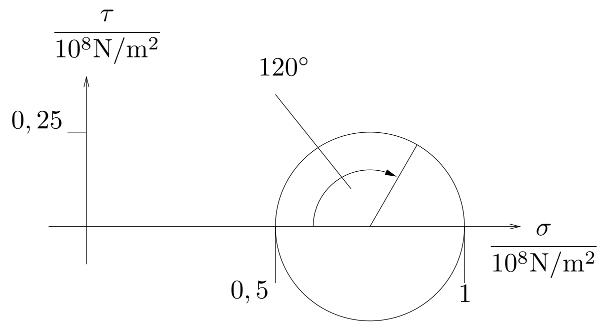

Schnittfläche und Zylinderinnenfläche[3]:

$$\begin{aligned}
A_S &= 2lt \\
A_i &= 2Rl
\end{aligned}$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\sum F_y = 0 &= \sigma_{yy} A_S - p A_i \\
0 &= \sigma_{yy} 2lt - p 2Rl \\
\Longrightarrow & \boxed{\sigma_{yy} = \frac{R}{t} p = 2\sigma_{xx}} = 1 \cdot 10^8 \text{N/m}^2
\end{aligned}$$

**(b)**

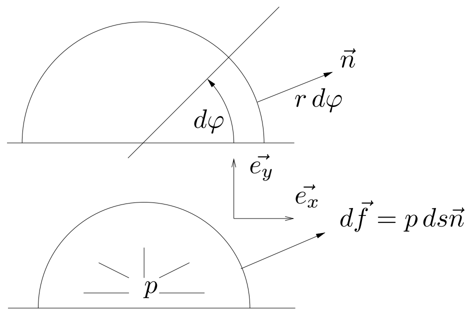



**(c)** grafische Lösung: $\sigma(\varphi = 60°) = 0,875 \cdot 10^8$N/m$^2$; $\tau(\varphi = 60°) = 0,2165 \cdot 10^8$N/m$^2$
rechnerische Lösung:

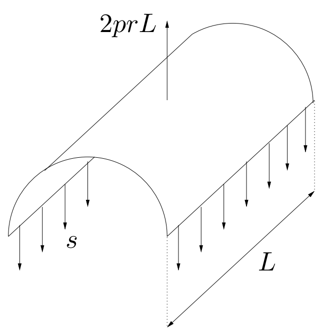
$$\begin{aligned}
\sigma(\varphi) &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\
&= \frac{1,5 \cdot 10^8}{2} \text{N/m}^2 - \frac{0,5 \cdot 10^8}{2} \text{N/m}^2 \cos 120° + 0 \\
& \boxed{\sigma(\varphi = 60°) = 0,875 \cdot 10^8 \text{N/m}^2} \\
\tau(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \\
&= -\frac{0,5 \cdot 10^8}{2} \text{N/m}^2 \sin 120° + 0 \\
& \boxed{\tau(\varphi = 60°) = 0,2165 \cdot 10^8 \text{N/m}^2}
\end{aligned}$$

**(d)** aus der Skizze des Mohrschen Kreises ist ersichtlich, dass $\tau_{max} = 0,25 \cdot 10^8$N/m$^2$ bei $2\varphi = 90°$ herrscht.

**Nachtrag:** Erklärung warum die projizierte Fläche relevant ist:




$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_{<\vec{e_i}>} \\
d\vec{f} &= pr\,d\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_{<\vec{e_i}>} \\
\vec{f} &= \int d\vec{f} = pr \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi \\
&= pr \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix}_0^\pi = pr \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$




[3] projizierte Fläche! (siehe Erklärung weiter unten im Text)

$$[\vec{f}] = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; \quad [prL] = 1\mathrm{N}; [s] = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

GGB: $2prL = s2L \Longrightarrow s = pr$

$$\boxed{\sigma_U = \frac{s}{t} = \frac{pr}{t}}$$

---

# Hausaufgaben

### Aufgabe 134

**(a)** Bestimmung der Hauptspannungen:

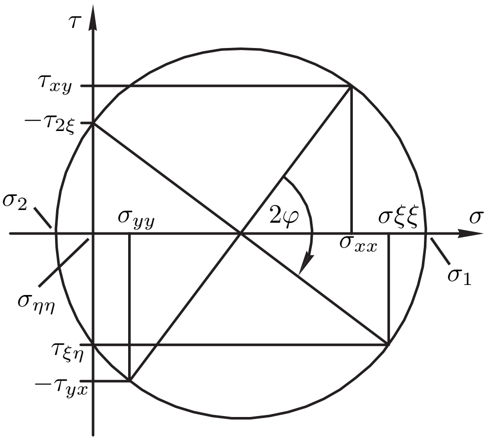
$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \frac{7+1}{2}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 + 4^2}\quad\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$
$$= 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \pm 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma_1 = 9\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \qquad \sigma_2 = -1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

**(b)** Maximale Schubspannung $\tau_{max}$:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 + 4^2}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$
$$= 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

**(c)** Mohrscher Spannungskreis:




**(d)** Normalspannungen $\sigma_{\xi\xi}$ und $\sigma_{\eta\eta}$ sowie Schubspannung $\tau_{\xi\eta}$ für Drehung um den Winkel $\varphi$:

- die Größen können am Mohrschen Kreis abgelesen werden. Oder
- rechnerisch ermittelt werden:

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$
$$= 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} + 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} + 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$
$$= 8\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

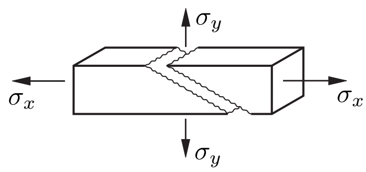
$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi$$
$$= 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} - 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} - 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$
$$= 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$
$$= -3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} + 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

---

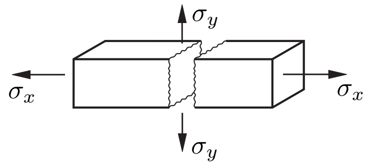
### Aufgabe 135

Motivation:




Material:

- schubweich / nicht schubfest




- geringe Zugfestigkeit, spröde

Es gibt unterschiedliche Materialversagens-Hypothesen:

- Normalspannungshypothese ($\sigma_v = \sigma_1$)
- Schubspannungshypothese ($\sigma_v = 2\tau_max$)
- Gestaltänderungsenergie-Hyp. (v.Mises: $\sigma_v^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\,\sigma_2$)
- Erweiterte Schubspannungshyp. (Mohr)

rechnerische Lösung:

Gegebene Spannungen:

$$\sigma_x = 100\ \mathrm{MPa} \tag{29}$$
$$\sigma_y = 60\ \mathrm{MPa} \tag{30}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -48\ \mathrm{MPa} \tag{31}$$

**(a)**

1. Hauptspannung $\sigma_{H1}$

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{32}$$

2. Hauptspannung $\sigma_{H2}$

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{33}$$

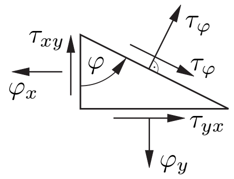
$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = 80\ \mathrm{MPa} \tag{34}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 52\ \mathrm{MPa} \tag{35}$$

Ergebnis:

$$\underline{\sigma_{H1}} = 80\ \mathrm{MPa} + 52\ \mathrm{MPa} = 132\ \mathrm{MPa} > \sigma_x \tag{36}$$
$$\underline{\sigma_{H2}} = 80\ \mathrm{MPa} - 52\ \mathrm{MPa} = \underline{28\ \mathrm{MPa}} < \sigma_y \tag{37}$$

Hauptrichtung $\varphi_H$:




Aus GGW am Flächenelement ist die Schubspannung $\tau_\varphi$:

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \tag{38}$$

Bedingung für $\varphi_H$:

$$\boxed{\tau_\varphi \overset{!}{=} 0} \tag{39}$$

$\Downarrow$

$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan\Big(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\Big) \tag{40}$$

$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan(-2{,}4) = -0{,}588 \mathrel{\hat{=}} -33{,}6^\circ \tag{41}$$

**(b)** max. Schubspannung:

$$\Big[\text{bei } \varphi_{\tau\max} = \frac{\pi}{4} + \varphi_H = 11{,}31^\circ\Big] \tag{42}$$

$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\Big(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\Big)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{43}$$

$$= \pm\Big(\frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}\Big) = \pm 52 \text{ MPa} \tag{44}$$

**(c)** Spannungskomponenten im Koordinatensystem $\tilde{x}, \tilde{y}$ unter $\varphi = 30^\circ$ zum $x, y$-System:

$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \tag{45}$$

$$= 80 \text{ MPa} + 20 \text{ MPa} \cos 60^\circ - 48 \text{ MPa} \sin 60^\circ$$

$$= 48{,}43 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \tag{46}$$

$$= -20 \text{ MPa} \sin 60^\circ - 48 \text{ MPa} \cos 60^\circ$$

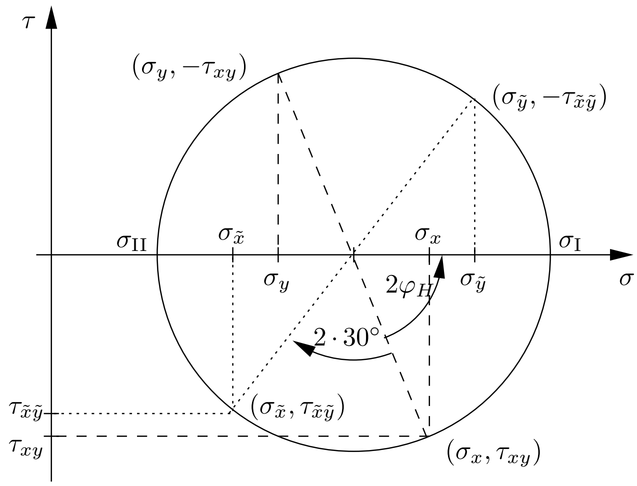
$$= -41{,}32 \text{ MPa}$$

Die Spur des Spannungstensors (die Summe der Hauptdiagonalelemente der entsprechenden Matrix) ist invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems. (Ebenso die Determinante, aber das wird hier nicht ausgenutzt.)

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\tilde{x}} + \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{H1} + \sigma_{H2} \tag{47}$$

$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{\tilde{x}} = 111{,}57 \text{ MPa} \tag{48}$$

Grafische Lösung:




---

**Aufgabe 143**

**(a)** Am linken Ende ist das Biegemoment

$$M_b(0) = -aF_a \tag{49}$$

und am rechten

$$M_b(c) = -bF_b \tag{50}$$

und dazwischen verläuft es linear. Das betragsmäßig größte Biegemoment tritt im Querschnitt

$$\hat{x} = c \tag{51}$$

auf mit

$$\hat{M}_b = |M_b(\hat{x})| = bF_b \tag{52}$$

**(b)**

$$I_y = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{64} D^4 \tag{53}$$

$$I_p = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{32} D^4 \tag{54}$$

**(c)** max. Normalspannung aus Biegung:

$$\sigma_{xx} = \frac{\hat{M}_b}{I_y} \frac{D}{2}$$

$$= \frac{32}{\pi} \frac{\hat{M}_b}{D^3} = \frac{32}{\pi} \frac{b}{D^3} F_b \tag{55}$$

max. Schubspannung aus Torsion:

$$\tau_{xy} = \frac{M_T}{I_p} \frac{D}{2}$$

$$= \frac{16}{\pi} \frac{M_T}{D^3} \tag{56}$$

**(d)** Zweiachsiger (ebener) Spannungszustand mit $\sigma_{yy} = 0$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_{xx} + \sqrt{\Big(\frac{1}{2}\sigma_{xx}\Big)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{57}$$

$$\sigma_{\text{zul}} \overset{!}{\geq} \sigma_1 = \frac{16}{\pi} D^{-3} \Big[\hat{M}_b + \sqrt{\hat{M}_b^2 + M_T^2}\Big] \tag{58}$$

$$D \overset{!}{\geq} \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{\hat{M}_b + \sqrt{\hat{M}_b^2 + M_T^2}}{\sigma_{\text{zul}}}} \tag{59}$$