

# Tutorium

## Aufgabe 123

(a) Für das Biegemoment gibt es drei Bereiche zu untersuchen. Das System ist statisch bestimmt.

Bereich I:  $0 < x < a$

$$-q_I = Q_I' \Rightarrow Q_I' = 0 \Rightarrow Q_I = c_1 \quad (1)$$

$$M_I' = Q_I \Rightarrow M_I' = c_1 \Rightarrow M_I = c_1 x + c_2 \quad (2)$$

Bereich II:  $a < x < l - a$

$$-q_{II} = Q_{II}' \Rightarrow Q_{II}' = 0 \Rightarrow Q_{II} = c_3 \quad (3)$$

$$M_{II}' = Q_{II} \Rightarrow M_{II}' = c_3 \Rightarrow M_{II} = c_3 x + c_4 \quad (4)$$

Bereich III:  $l - a < x < l$

$$-q_{III} = Q_{III}' \Rightarrow Q_{III}' = 0 \Rightarrow Q_{III} = c_5 \quad (5)$$

$$M_{III}' = Q_{III} \Rightarrow M_{III}' = c_5 \Rightarrow M_{III} = c_5 x + c_6 \quad (6)$$

Somit ist es ersichtlich, dass pro Bereich 2 Konstanten zu berechnen sind. (3 Bereiche liegen vor, d.h.  $3 \cdot 2 = 6$  Konstanten:  $c_i$  mit  $i = 1, 2..6$ )

Für die Berechnung dieser 6 Konstanten braucht man 6 linear unabhängige Gleichungen. Diese Gleichungen ergeben sich aus den Rand- und Übergangsbedingungen:

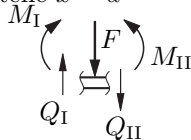
### Randbedingungen

$$M_I(x=0) = 0 \quad (7)$$

$$M_{III}(x=l) = 0 \quad (8)$$

### Übergangsbedingungen

Freischnitt an der Stelle  $x = a$

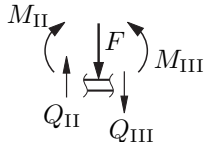


Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_I(x=a) = M_{II}(x=a) \quad (9)$$

$$Q_I(x=a) = F + Q_{II}(x=a) \quad (10)$$

Freischnitt an der Stelle  $x = l - a$ :



Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_{II}(x=l-a) = M_{III}(x=l-a) \quad (11)$$

$$Q_{II}(x=l-a) = F + Q_{III}(x=l-a) \quad (12)$$

Somit liegen jetzt 6 Gleichungen für die Berechnung der Konstanten  $c_i$  ( $i = 1, 2..6$ ) vor. Es können alle diese 6 Konstanten eindeutig bestimmt werden. (Die 6 Gleichungen sind linear unabhängig voneinander.)

$$\text{Aus (7) in (2) folgt: } c_2 = 0 \quad (13)$$

$$\text{Aus (8) in (6) folgt: } c_6 = -c_5 l \quad (14)$$

$$\text{Aus (9) folgt: } c_1 a + c_2 = c_3 a + c_4 \quad (15)$$

$$\text{Aus (10) folgt: } c_1 = F + c_3 \quad (16)$$

$$\text{Aus (11) folgt: } c_3(l-a) + c_4 = c_5(l-a) + c_6 \quad (17)$$

$$\text{Aus (12) folgt: } c_3 = F + c_5 \quad (18)$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems lauten:

$$c_1 = F, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0 \quad (19)$$

$$c_4 = Fa, \quad c_5 = -F, \quad c_6 = Fl \quad (20)$$

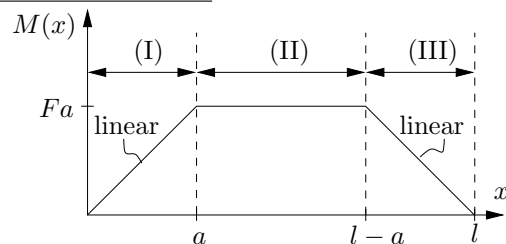
Somit erhält man für das jeweilige Biegemoment indem man die Konstanten einsetzt:

$$M_I(x) = Fx \quad (21)$$

$$M_{II}(x) = Fa = \text{const.} \geq 0 \quad (22)$$

$$M_{III}(x) = F(l-x) \quad (23)$$

Graphische Darstellung:

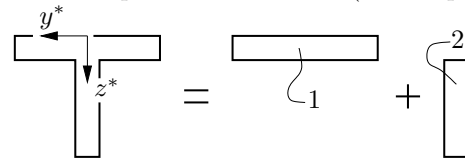


Somit ist das Biegemoment im zweiten Bereich (entlang des ganzen Bereichs) maximal und konstant.

$$M_{\max} = Fa = 3750 \text{ N m} \quad (24)$$

Das ist der Maximalwert des Biegemomentes im Balken (um die  $y$ -Achse).

(b) Flächenmittelpunkt des T-Profiles (Balkenquerschnitt)



Flächenmittelpunkt in  $y^*$ -Richtung:

$$y_S^* = 0 \quad (25)$$

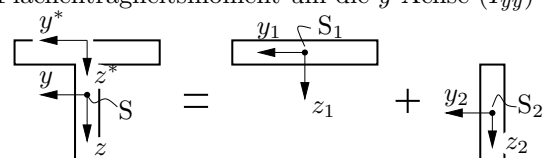
Flächenmittelpunkt in  $z^*$ -Richtung:

Körper	$y_i^*$	$z_i^*$	$A_i$	$y_i^* A_i$	$z_i^* A_i$
$i = 1$	0	$\frac{t}{2}$	$bt$	0	$\frac{1}{2}bt^2$
$i = 2$	0	$t + \frac{c}{2}$	$ct$	0	$ct(t + \frac{c}{2})$
$\Sigma$	—	—	$(b+c)t$	0	$\frac{1}{2}bt^2 + ct(t + \frac{c}{2})$

$$z_S^* = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i Z_i^*}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{\frac{bt}{2} + ct + \frac{c^2}{2}}{b+c} \quad (26)$$

$$= \frac{bt + 2ct + c^2}{2(b+c)} \approx 24,642 \text{ mm} \quad (27)$$

(c) Flächenträgheitsmoment um die  $y$ -Achse ( $I_{yy}$ )

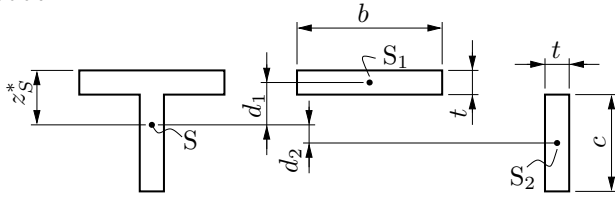


Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1y_1} + d_1^2 A_1 + I_{y_2y_2} + d_2^2 A_2 \quad (28)$$

$$\sigma(z) = \frac{M}{I_{yy}} z \quad (37)$$

wobei



( $M$  ist hier das Moment um die  $y$ -Achse)

Flächenträgheitsmoment aus Gleichung (35):

$$I_{yy} = \frac{1}{4} t \left[ \frac{1}{3} (bt^2 + c^3) + bc \frac{(c+t)^2}{b+c} \right] = \text{konst.} \quad (38)$$

woraus ersichtlich ist, dass:

$$A_1 = bt, A_2 = ct, d_1 = z_S^* - \frac{t}{2} = \frac{c}{2} \frac{c+t}{b+c} \text{ und}$$

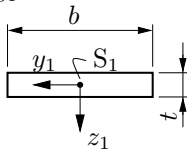
$$d_2 = t + \frac{c}{2} - z_S^* = \frac{b}{2} \frac{c+t}{b+c}$$

$\sigma(z) = \sigma_{max}(z)$  bei  $M = M_{max}$  und  $z = z_{max}$ .

$M_{max}$  aus Frage (b) Gleichung (24):

$$M_{max} = Fa \quad (39)$$

Berechnung von  $I_{y_1y_1}$ :



$$I_{y_1y_1} = \int_{(A_1)} z_1^2 dA_1 \quad (29)$$

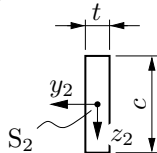
$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z_1^2 dz_1 dy_1 = \frac{1}{12} bt^3 \quad (30)$$

$z_{max}$  kann aus der Skizze zur Geometrie abgelesen werden:

unterer Rand des T-Profiles (Zugbeanspruchung):  $z_{max} = t + c - z_S^* \quad (40)$

oberer Rand des T-Profiles (Druckbeanspruchung):  $z_{max} = -z_S^* \quad (41)$

Berechnung von  $I_{y_2y_2}$ :



Am unteren Rand des Profils:

$$\sigma_{max,Zug} = \frac{Fa}{I_{yy}} (t + c - z_S^*) \approx 165,963 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (42)$$

Am oberen Rand des Profils:

$$\sigma_{max,Druck} = \frac{Fa}{I_{yy}} (-z_S^*) \approx -65,583 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (43)$$

Analog gilt folgendes:

$$I_{y_2y_2} = \int_{(A_2)} z_2^2 dA_2 \quad (31)$$

$$= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z_2^2 dz_2 dy_2 = \frac{1}{12} tc^3 \quad (32)$$

jetzt wird alles  $I_{y_1y_1}, I_{y_2y_2}, A_1, A_2, d_1, d_2$  in Gleichung (28) gesetzt.

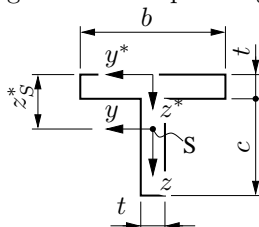
$$I_{yy} = \frac{1}{12} bt^3 + \frac{c^2}{4} \left( \frac{c+t}{b+c} \right)^2 bt \quad (33)$$

$$+ \frac{1}{12} tc^3 + \frac{b^2}{4} \left( \frac{c+t}{b+c} \right)^2 ct \quad (34)$$

$$= \frac{1}{4} t \left[ \frac{1}{3} (bt^2 + c^3) + bc \frac{(c+t)^2}{b+c} \right] \quad (35)$$

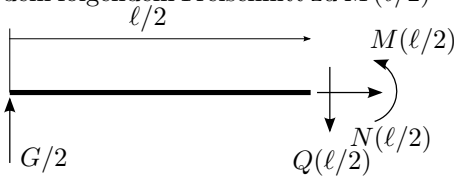
$$\approx 1,409 \cdot 10^6 \text{mm}^4 \quad (36)$$

(d) Maximale Zug- und Druckspannung im Maschinenteil



**Aufgabe 125**

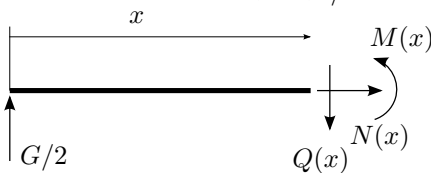
(a) Aus Symmetriegründen verteilt sich die Last  $G$  auf die beiden Lager zu gleichen Teilen. Alternativ kann die Lagerreaktion aus einem Freischnitt berechnet werden. Das Biegemoment an der Kasteinleitungsstelle  $x = \ell/2$  erhalten wir aus dem folgendem Freischnitt zu  $M(\ell/2) = G\ell/4$ .



(b) Die maximale Normalspannung bestimmt sich zu:

$$\sigma = \frac{M}{I}z = \pm \frac{G\ell}{4} \frac{2}{bh^3} \frac{2b+h}{2} = \pm \frac{G\ell}{4} \frac{2b+h}{bh^3}. \quad (44)$$

(c) Mit einem Freischnitt für  $0 < x < \ell/2$ :

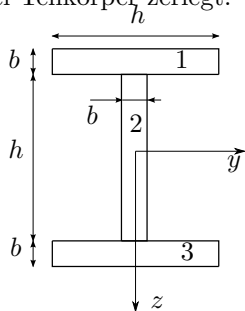


zeigt man, dass

$$M(x) = Gx/2 \text{ für } 0 < x < \ell/2. \quad (45)$$

Im Bereich  $\ell/2 < x < \ell$  ist das Moment wieder linear, mit den Randwerten  $M(\ell/2) = G\ell/4$  und  $M(\ell) = 0$ . Damit tritt das maximale Biegemoment in der Trägermitte auf.

(d) Zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes wird der Körper in drei Teilkörper zerlegt.



	$A_i$	$z_{si} =  z_i - z_s $	$A_i z_{si}^2$	$I_{i,y_i}$
1	$bh$	$-\frac{1}{2}(h+b)$	$\frac{1}{4}bh(h+b)^2$	$\frac{1}{12}b^3h$
2	$bh$	0	0	$\frac{1}{12}bh^3$
3	$bh$	$\frac{1}{2}(h+b)$	$\frac{1}{4}bh(h+b)^2$	$\frac{1}{12}b^3h$
$\Sigma$			$\frac{1}{2}bh(b+h)^2$	$\frac{1}{12}(2b^3h + bh^3)$

Unter Verwendung des Tabellenverfahrens erhält man das Flächenträgheitsmoment zu

$$I = I_y = \frac{1}{2}bh(b+h)^2 + \frac{1}{12}(2b^3h + bh^3) \quad (46)$$

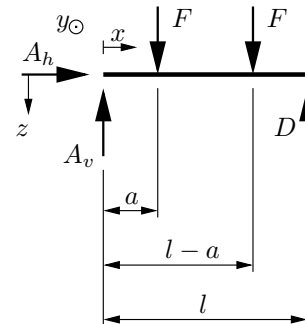
$$= \frac{2}{3}bh^3 + b^2h^2 + \frac{2}{3}b^3h \geq \frac{1}{2}bh^3. \quad (47)$$

**Hausaufgaben**

**Aufgabe 126**

Auflagerreaktionen:

Freischnitt:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_h = 0} \quad (48)$$

$$\sum M_y^A = 0 \Rightarrow -Fa - F(l-a) + Dl = 0 \quad (49)$$

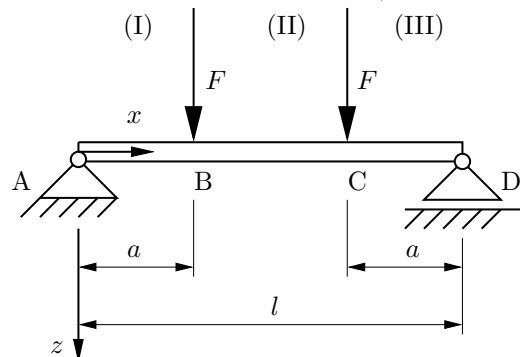
$$\Rightarrow \boxed{D = F} \quad (50)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_v + 2F - D = 0 \quad (51)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = F} \quad (52)$$

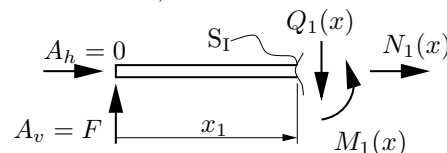
Biegemoment  $M(x)$  :

Es gibt drei Bereiche zu untersuchen (I, II und III)



Bereich I:  $0 \leq x_1 < a$

Schnitt an der Stelle  $x$ , Freischnittskizze:

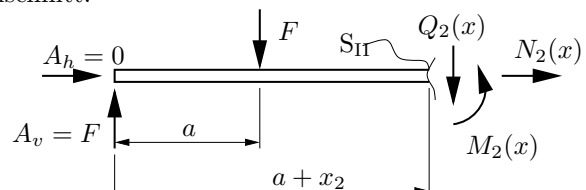


Bei  $S_I$ : positives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_I)} = M_1(x) - Fx_1 = 0 \Rightarrow M_1(x) = Fx_1 \quad (53)$$

Bereich II:  $0 \leq x_2 < l - 2a$

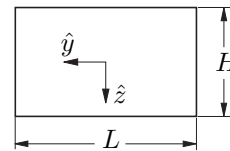
Freischnitt:



Bei S<sub>II</sub>: positives Schnittufer!

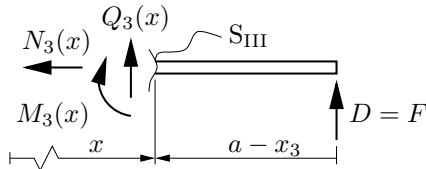
$$\sum M_y^{(S_{II})} = M_2(x) - F(x_2 + a) + F(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \quad (54)$$

$$\Rightarrow M_2(x) = Fa = \text{konst.} \quad (55)$$



Bereich III:  $0 \leq x_3 \leq a$

Freischnitt:

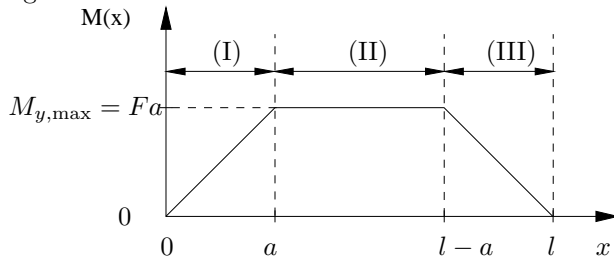


Bei S<sub>III</sub>: negatives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_{III})} = -M_3(x) + F(a - x_3) = 0 \quad (56)$$

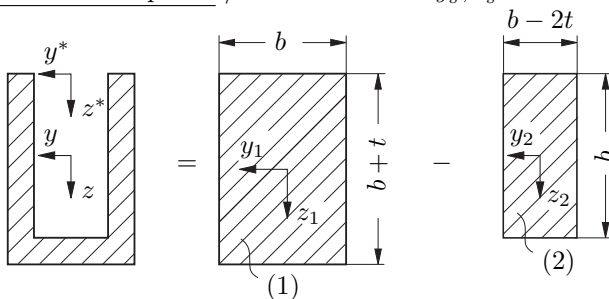
$$\Rightarrow M_3(x) = F(a - x_3) \quad (57)$$

Biegemomentenverlauf:



Das ist das maximale Biegemoment  $M_{y,max} = Fa$  tritt also im zweiten Bereich auf und ist dort konstant.

Flächenschwerpunkt / Bestimmen von  $y_s^*, z_s^*$ :



$y_s^* = 0$  (aufgrund der Symmetrie)

Tabelle für die Berechnung von  $z_s^*$ :

$i$	$z_i^*$	$A_i$	$z_i^* A_i$
1	$\frac{b+t}{2}$	$b(b+t)$	$\frac{b}{2}(b+t)^2$
2	$\frac{b}{2}$	$b(b-2t)$	$\frac{b^2}{2}(b-2t)$
$\sum$	—	$3bt$	$\frac{bt}{2}(4b+t)$

$$z_s^* = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i z_i^*}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{\frac{bt}{2}(4b+t)}{3bt} \quad (58)$$

$$= \frac{4b+t}{6} \quad (59)$$

Flächenträgheitsmoment  $I_{yy}$ :

Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1 y_1} + d_1^2 A_1 - I_{y_2 y_2} - d_2^2 A_2 \quad (60)$$

Für ein Rechteck der Höhe  $H$  und der Breite  $L$  gilt bzgl. der Schwerpunktskoordinaten  $(\hat{y}, \hat{z})$ :

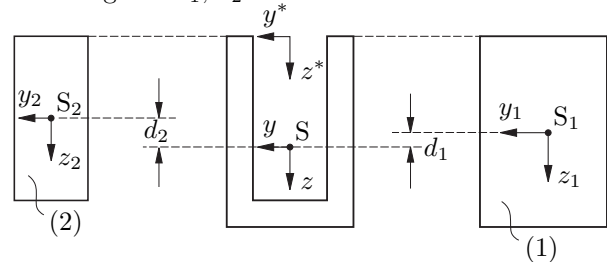
$$I_{\hat{y}\hat{y}} = \int_{(A)} \hat{z}^2 dA = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \hat{z}^2 d\hat{z} d\hat{y} = \frac{1}{12} H^3 L \quad (61)$$

Somit erhält man:

$$I_{y_1 y_1} = \frac{1}{12} (b+t)^3 b \quad \text{und} \quad (62)$$

$$I_{y_2 y_2} = \frac{1}{12} b^3 (b-2t) \quad (63)$$

Berechnung von  $d_1, d_2$ :



Aus der Geometrie:

$$A_1 = b(b+t), \quad A_2 = b(b-2t), \quad (64)$$

$$d_1 = z_s^* - \frac{b+t}{2} \quad \text{und} \quad d_2 = z_s^* - \frac{b}{2} \quad (65)$$

Einsetzen von  $I_{y_1 y_1}, I_{y_2 y_2}, A_1, A_2, d_1$  und  $d_2$ , in die Gleichung (60) liefert:

$$I_{yy} = \frac{1}{12} (b+t)^3 b + \left(z_s^* - \frac{b+t}{2}\right)^2 b(b+t) + \dots \quad (66)$$

$$- \frac{1}{12} b^3 (b-2t) - \left(z_s^* - \frac{b}{2}\right)^2 b(b-2t) = \frac{1}{3} b^3 t + \mathcal{O}(b^2 t^2) \quad (67)$$

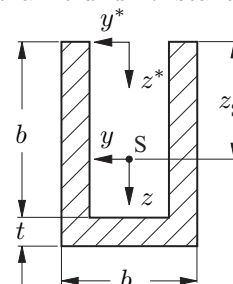
Gesucht sind die maximale Zug- und Druckspannung in dem Maschinenteil. Für die Normalspannung  $\sigma$  gilt für das Hauptträgheitsachsensystem  $(y, z)$ :

$$\sigma(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z - \underbrace{\frac{M_z(x)}{I_{zz}} y}_{=0, \text{ ebener Lastfall}} + \underbrace{\frac{N(x)}{A}}_{=0, N_i(x)=0 \forall i} \quad (68)$$

Daraus folgt, dass:

$$\sigma = \sigma_{\max}(z) \quad \text{bei} \quad M(x) = M(x)_{\max} \quad \text{und} \quad z = z_{\max} \quad (69)$$

( $I_{yy}$  ist schon bekannt und konstant).



Somit ist  $z_{\max}$ :

$$z_{\max} = \begin{cases} b + t - z_S^* & \text{am unteren Rand des Profils: Zugspannung} \\ -z_S^* & \text{am oberen Rand des Profils: Druckspannung} \end{cases}$$

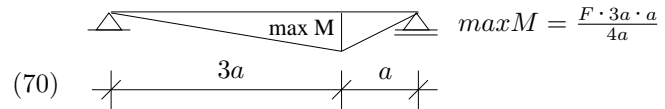
Daraus folgt, dass:

$$\sigma_{\max, \text{Zug}} = \frac{Fa}{I_{yy}} (b + t - z_S^*) \quad (71)$$

und

$$\sigma_{\max, \text{Druck}} = -\frac{Fa}{I_{yy}} z_S^* \quad (72)$$

**Aufgabe 129**



$$M(x_1) = \frac{3Fa}{3a} x_1 = \frac{1}{4} F x_1$$

$$M(x_2) = \frac{3}{4} Fa - \frac{3Fa}{4a} x_2 = \frac{3}{4} Fa - \frac{3}{4} F x_2$$

allgemein gilt  $\sigma_x = \frac{M}{W}$

wobei das Widerstandsmoment mit  $W_y = I_y / e_y = \frac{bh^2}{6}$  definiert ist.

hier:

Bereich 1:

$$W_1 = \frac{b \cdot (h_0 + \frac{h_0}{a} x_1)^2}{6}$$

mit  $h_1 = h_0 + \frac{3h_0}{3a} x_1$

$$\sigma_{x_1} = \frac{6F x_1}{4b \cdot (h_0^2 + 2\frac{h_0^2}{a} x_1 + \frac{h_0^2}{a^2} x_1^2)}$$

$$= \frac{3F}{2bh_0^2} \cdot \frac{x_1}{1 + \frac{2}{a} x_1 + \frac{1}{a^2} x_1^2}$$

Bereich 2:

$$W_2 = \frac{b \cdot (4h_0)^2}{6} = \frac{8}{3} bh_0^2$$

$$\sigma_{x_2} = \frac{\frac{3}{4} Fa - \frac{3}{4} F x_2}{\frac{8}{3} bh_0^2}$$

$$= \frac{9}{32} \frac{F}{bh_0^2} (a - x_2)$$

max. Normalspannung:

Das Extremum befindet sich an der Stelle, an der die Ableitung eine Nullstelle besitzt:

$$\sigma_{x,x_1} = \frac{3F}{2bh_0^2} \frac{(1 + \frac{2}{a} x_1 + \frac{1}{a^2} x_1^2) - (\frac{2}{a} + \frac{2}{a^2} x_1) x_1}{(1 + \frac{2}{a} x_1 + \frac{1}{a^2} x_1^2)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{a} x_1 + \frac{1}{a^2} x_1^2 - \frac{2}{a} x_1 - \frac{2}{a^2} x_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{a^2} x_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = a^2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = a}}$$

$$\max \sigma_x = \frac{3F}{2bh_0^2} \cdot \frac{a}{1 + \frac{2}{a} a + \frac{1}{a^2} a^2} = \underline{\underline{\frac{3Fa}{8bh_0^2}}}$$