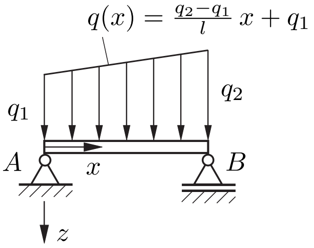
# Tutorium

## Aufgabe 103

**(a)**




Es handelt sich um ein *statisch bestimmtes* System, d.h. man kann alleine mit den Gleichgewichtsbedingungen oder den Schnittlastendifferentialgleichungen das Schnittmoment bestimmen.

$$M(x) = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\,l \cdot x - \frac{q_2 - q_1}{6l}\,x^3 - q_1\,\frac{x^2}{2} \tag{1}$$

Dieses ist proportional zur linearen Krümmung (Material-Strukturgleichung für den Biegebalken): $M = -EIw''$, $w''$ $\approx$ Krümmung. Durch anschließende zweimalige Integration erhält man die Biegelinie.

$$EIw(x) = \frac{q_2 - q_1}{120l}\,x^5 + q_1\,\frac{x^4}{24} - \frac{1}{36}(2q_1 + q_2)\,l \cdot x^3 + C_3 x + C_4 \tag{2}$$

Die Konstanten $C_3$ und $C_4$ erhält man aus den geometrischen Randbedingungen, siehe dazu auch das klassische Schema weiter unten.

Die folgende Lösung beinhaltet die viermalige Integration der Biegeliniendifferentialgleichung, die auch bei *statisch unbestimmten* Systemen zur Anwendung kommt:

$$q(x) = EIw''''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,x + q_1 \tag{3}$$

$$-Q(x) = EIw'''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^2}{2} + q_1 x + C_1 \tag{4}$$

$$-M(x) = EIw''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^3}{6} + q_1\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{5}$$

$$EIw'(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^4}{24} + q_1\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \tag{6}$$

$$EIw(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^5}{120} + q_1\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \tag{7}$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$M(x = 0) = 0 \tag{8}$$

$$M(x = l) = 0 \tag{9}$$

$$w(x = 0) = 0 \tag{10}$$

$$w(x = l) = 0 \tag{11}$$

$$(8) \;\rightarrow\; C_2 = 0 \tag{12}$$

$$(9) \;\rightarrow\; (q_2 - q_1)\frac{l^2}{6} + q_1\frac{l^2}{2} + C_1 l = 0$$

$$\rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{q_1 l}{3} - \frac{q_2 l}{6}} \tag{13}$$

$$(10) \;\rightarrow\; C_4 = 0 \tag{14}$$

$$(11) \;\rightarrow\; (q_2 - q_1)\frac{l^4}{120} + q_1\frac{l^4}{24} - \frac{q_1 l}{3}\frac{l^3}{6} - \frac{q_2 l}{6}\frac{l^3}{6} + C_3 l = 0 \tag{15}$$

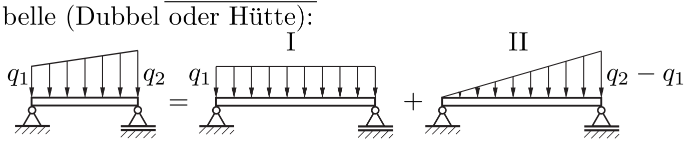
$$\frac{q_2 l^3}{120} - \frac{q_1 l^3}{120} + \frac{q_1 l^3}{24} - \frac{q_1 l^3}{18} - \frac{q_2 l^3}{36} + C_3 = 0 \tag{16}$$

$$\rightarrow\; \underline{C_3 = \frac{q_1 l^3}{45} + \frac{7 q_2 l^3}{360}} \tag{17}$$

$\rightarrow$ Biegelinie:

$$w(x) = \frac{l^4}{360\,EI}\Big[3(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + 15q_1\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - (20q_1 + 10q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + (8q_1 + 7q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{18}$$

Als Alternative und zum Vergleich hier der Lösungsweg mit Hilfe der Superpostion von Biegelinien aus einer Tabelle (Dubbel oder Hütte):




$$\mathrm{I}: \quad w_{\mathrm{I}}(x) = \frac{q_1 l^4}{24\,EI}\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - 2\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{19}$$

$$\mathrm{II}: \quad w_{\mathrm{II}}(x) = \frac{(q_2 - q_1)l^4}{360\,EI}\Big[3\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 - 10\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + 7\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{20}$$

$$w_{\mathrm{ges}}(x) = w_{\mathrm{I}}(x) + w_{\mathrm{II}}(x) \tag{21}$$

$$= \frac{l^4}{360\,EI}\Big[15q_1\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - 30q_1\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + 15q_1\Big(\frac{x}{l}\Big) + 3(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 - 10(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + 7(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big]$$

$$w_{\mathrm{ges}}(x) = \frac{l^4}{360\,EI}\Big[3(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + 15q_1\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - (20q_1 + 10q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + (8q_1 + 7q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{22}$$

**(b)** Um die maximale Durchsenkung zu ermitteln, muß die Gleichung $w'(x_{\mathrm{e}}) = 0$ für $0 < x < \ell$ gelöst werden, z.B numerisch für konkrete Werte $q_1$ und $q_2$. Dann läßt sich das Extremum der Durchsenkung $w_{\max} = w(x_{\mathrm{e}})$ bestimmen. Die so gewonnenen lokalen Extrema müssen dann noch mit den Werten an den Intervallgrenzen verglichen werden, die hier jedoch Null sind.

Eine Näherung erhält man durch getrennte Betrachtung der beiden Fälle $I$ und $II$. Die entsprechenden Stellen der Extremwerte liegen nahe beieinander:

$$\mathrm{I}: \quad w_I'(x_1) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ell \;\;\text{(da symmetrisch)} \tag{23}$$

$$\text{II}: \quad w'_{II}(\frac{x_2}{\ell} = \alpha) = 0 \rightarrow 15\alpha^4 - 30\alpha^2 + 7 = 0 \tag{24}$$

$$\alpha^2 = \beta \rightarrow \beta^2 - 2\beta + 7/15 = 0 \tag{25}$$

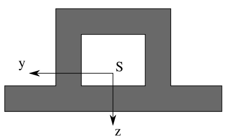
$$x_2 = \ell\sqrt{1 - \sqrt{8/15}} \approx 0,52\ell \tag{26}$$

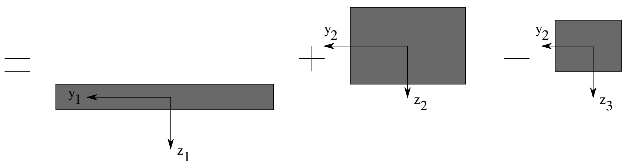
Für die maximale Durchsenkung kann also folgende Näherung verwendet werden:

$$w_{\max} \approx w_I(x_1) + w_{II}(x_1) = \frac{5\ell^4}{768EI}(q_1 + q_2) \tag{27}$$

## Aufgabe 119

### Bestimmen der Schwerpunktskoordinate




Berechnet wird der Abstand $z_s$ des Schwerpunktkoordinatensystems $y$, $z$ zum Koordinatensystem $y_1$, $z_1$.

### Tabellenverfahren

| | $A_i$ | $z_i$ | $A_i z_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $10 \cdot b^2$ | $0$ | $0$ |
| 2 | $18 \cdot b^2$ | $-2b$ | $-36 \cdot b^3$ |
| 3 | $-8 \cdot b^2$ | $-\frac{3}{2}b$ | $12 \cdot b^3$ |
| $\sum$ | $20 \cdot b^2$ | | $-24 \cdot b^3$ |

$$z_s = -\frac{6}{5}b \tag{28}$$

### Bestimmen des FTM

Es gilt:

$$I_y = I_{1,y} + I_{2,y} - I_{3,y} \tag{29}$$

$$I_y = I_{1,y_1} + z_{s1}^2 A_1 + I_{2,y_2} + z_{s2}^2 A_2 - I_{3,y_3} - z_{s3}^2 A_3 \tag{30}$$

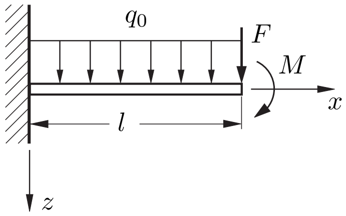
Dies kann mit einer erweiterten Tabelle leicht bestimmt werden.

| | $A_i$ | $z_{si} = \lvert z_i - z_s \rvert$ | $z_{si}^2$ | $A_i z_{si}^2$ | $I_{i,y_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $10 \cdot b^2$ | $\frac{6}{5}b$ | $\frac{36}{25}b^2$ | $\frac{360}{25}b^4$ | $\frac{10}{12}b^4$ |
| 2 | $18 \cdot b^2$ | $\frac{4}{5}b$ | $\frac{16}{25}b^2$ | $\frac{288}{25}b^4$ | $\frac{162}{12}b^4$ |
| 3 | $-8 \cdot b^2$ | $\frac{3}{10}b$ | $\frac{9}{100}b^2$ | $-\frac{18}{25}b^4$ | $-\frac{32}{12}b^4$ |
| $\sum$ | | | | $\frac{126}{5}b^4$ | $\frac{35}{3}b^4$ |

$$I_y = \frac{553}{15}b^4 \tag{31}$$

# Hausaufgaben

### Aufgabe 105

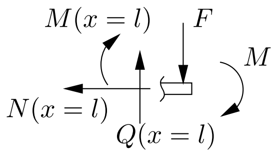



Biegelinie:

$$EI\,w''''(x) = q_0 \tag{32}$$
$$EI\,w'''(x) = q_0 \cdot x + C_1 \tag{33}$$
$$EI\,w''(x) = \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_3 \tag{34}$$
$$EI\,w'(x) = \frac{1}{6}q_0 x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \tag{35}$$
$$EI\,w(x) = \frac{1}{24}q_0 x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4 \tag{36}$$

<u>Randbedingung:</u>

$$1)\quad w(0) = 0 \tag{37}$$
$$2)\quad w'(0) = 0 \tag{38}$$




$$3)\ EI\,w''(x=l) = -M(x=l) = M \tag{39}$$
$$4)\ EI\,w'''(x=l) = -Q(x=l) = -F \tag{40}$$

$$1)\ \Rightarrow\ C_4 = 0 \qquad 2)\ \Rightarrow\ C_3 = 0 \tag{41}$$
$$3),\,4)\ \Rightarrow\ C_2 = M + Fl + \frac{1}{2}q_0 l^2\,;\ C_1 = -F - q_0 l \tag{42}$$

$\hat{w}$ ist die Durchsenkung $w(l)$ am rechten Rand ($x = l$). S. Gl. (36):

$$\hat{w} = w(l) = \frac{1}{EI}\Big[\frac{1}{24}q_0 l^4 + \big(M + Fl + \frac{1}{2}q_0 l^2\big)\cdot\frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{6}\big(-F - q_0 l\big)\Big] \tag{43}$$
$$= \frac{1}{EI}\Big(\frac{Ml^2}{2} + \frac{1}{3}F\cdot l^3 + \frac{1}{8}q_0 l^4\Big)$$
$$\overset{!}{=} \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} + \frac{q_0 l^4}{8EI} \tag{44}$$

$\varphi(x) = w'(x)$, Biegewinkel am rechten Rand: $\hat{\varphi} = w'(l)$ aus Gl. (35):

$$\varphi(l) = \frac{1}{EI}\Big[\frac{1}{6}q_0 l^3 + \big(M + F\,l + \frac{1}{2}q_0 l^2\big)l \tag{45}$$
$$+ \frac{l^2}{2}(-F - q_0 l)\Big] \tag{46}$$
$$\hat{\varphi} = \frac{1}{EI}\Big(Ml + \frac{Fl^2}{2} + \frac{q_0 l^3}{6}\Big)$$
$$\overset{!}{=} \frac{F\,l^2}{2EI} + \frac{M\,l}{EI} + \frac{q_0 l^3}{6EI} \tag{47}$$

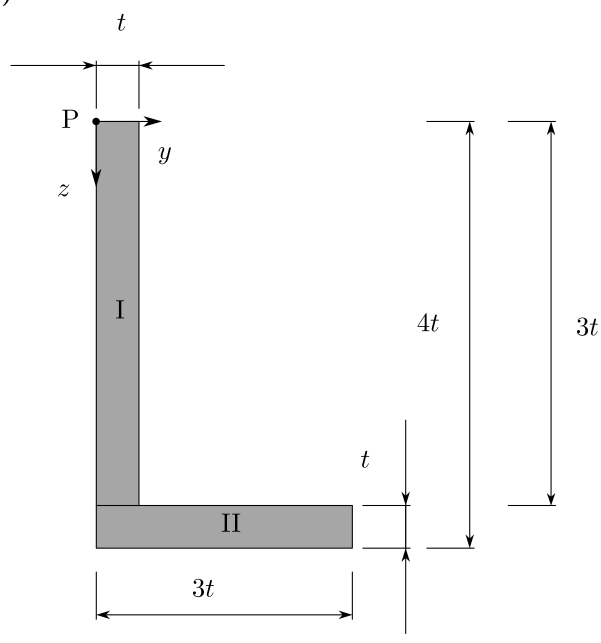
### Aufgabe 120

Bei beiden Systemen wird zur Bestimmung des Flächenträgheitssystems analog vorgegangen. Das jeweilige System wird in Teilsysteme (hier Rechtecke und Kreise) mit bekannten Eigenflächenträgheitsmomenten zerlegt. Von dem Gesamtsystem wird der Gesamtschwerpunkt berechnet. Dann werden in Tabellen die jeweiligen relevanten Werte eingetragen. Das sind:

- Fläche des Teilsystems $A_i$
- Abstand der Gesamtschwerpunktsachse um die das FTM gebildet werden soll zu der lokalen Schwerpunktachse des Teilsystems $a_i$ in $y$-Richtung bzw. $b_i$ in $z$-Richtung
- Steineranteil $+a_i^2 A_i$, $+b_i^2 A_i$ bzw. $-a_i b_i A_i$
- Eigenflächenträgheitsmomente $I_{yy}^*$, $I_{zz}^*$ bzw. $I_{yz}^*$ (FTM um lokale Schwerpunktachsen; hier als bekannt für die einfachen Teilsysteme vorrausgesetzt)

Danach werden die Steineranteile und die Eigen-FTM addiert, um das Gesamt-FTM zu bestimmen.

**(a)**




Ermittlung des Schwerpunktes des Gesamtsystems:

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} \tag{48}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}t\cdot 3t^2 + \frac{3}{2}t\cdot 3t^2}{3t^2 + 3t^2} \tag{49}$$
$$= t \tag{50}$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} z_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} \tag{51}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}t\cdot 3t^2 + \frac{7}{2}t\cdot 3t^2}{3t^2 + 3t^2} \tag{52}$$
$$= \frac{5}{2}t \tag{53}$$

Schwerpunkt des Gesamtsystems liegt bei $S = \big(t; \frac{5}{2}t\big)$.
Berechnung von $I_{yy}$:

| Teilkörper | $A_i$ | $b_i = z_{Si} - z_S$ | $b_i^2 A_i$ | $I_{yy}^*$ |
|---|---|---|---|---|
| I | $3t^2$ | $t$ | $3t^4$ | $\frac{9}{4}t^4$ |
| II | $3t^2$ | $t$ | $3t^4$ | $\frac{1}{4}t^4$ |
| $\sum$ | / | – | $6t^4$ | $\frac{5}{2}t^4$ |

$$\Rightarrow \quad I_{yy} = \sum a_i^2 A_i + \sum I_{yy}^* \tag{54}$$

$$= \underline{\underline{\frac{17}{2}t^4}} \tag{55}$$

Berechnung von $I_{zz}$:

| Teilkörper | $A_i$ | $a_i = y_{Si} - y_S$ | $a_i^2 Ai$ | $I_{zz}^*$ |
|---|---|---|---|---|
| I | $3t^2$ | $\frac{t}{2}$ | $\frac{3}{4}t^4$ | $\frac{1}{4}t^4$ |
| II | $3t^2$ | $\frac{t}{2}$ | $\frac{3}{4}t^4$ | $\frac{9}{4}t^4$ |
| $\sum$ | / | – | $\frac{3}{2}t^4$ | $\frac{5}{2}t^4$ |

$$\Rightarrow \quad I_{zz} = \sum b_i^2 A_i + \sum I_{zz}^* \tag{56}$$

$$= \underline{\underline{4t^4}} \tag{57}$$

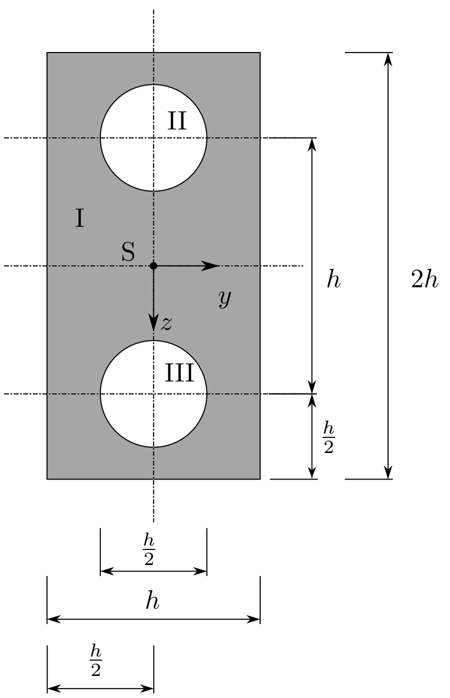
Berechnung von $I_{yz}$ (Deviationsmoment):

| Teilkörper | $A_i$ | $a_i$ | $b_i = z_{Si} - z_S$ | $a_i b_i A_i$ | $I_{yz}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $3t^2$ | $\frac{t}{2}$ | $t$ | $\frac{3}{2}t^4$ | 0 |
| II | $3t^2$ | $\frac{t}{2}$ | $t$ | $\frac{3}{2}t^4$ | 0 |
| $\sum$ | / | – | – | $3t^4$ | 0 |

$$\Rightarrow \quad I_{yz} = -\sum a_i b_i A_i + \sum I_{yz}^* \tag{58}$$

$$= \underline{\underline{-3t^4}} \tag{59}$$

**(b)**




Hier werden von dem kompletten Rechteck (I) die beiden Flächenträgheitsmomente der Kreise (II) und (III) abgezogen:

$$I_{\text{ges}} = I_I - I_{II} - I_{III} \tag{60}$$

Berechnung von $I_{yy}$:

| Teilkörper | $A_i$ | $b_i = z_{Si} - z_S$ | $b_i^2 Ai$ | $I_{yy}^*$ |
|---|---|---|---|---|
| I | $2h^2$ | 0 | 0 | $\frac{2}{3}h^4$ |
| II | $-\frac{\pi h^2}{16}$ | $-\frac{h}{2}$ | $-\frac{\pi h^4}{64}$ | $-\frac{\pi h^4}{1024}$ |
| III | $-\frac{\pi h^2}{16}$ | $\frac{h}{2}$ | $-\frac{\pi h^4}{64}$ | $-\frac{\pi h^4}{1024}$ |
| I-II-III | / | – | $-\frac{\pi h^4}{32}$ | $\left(\frac{512-3\pi}{1536}\right)h^4$ |

$$\Rightarrow \quad I_{yy} = \sum b_i^2 A_i + \sum I_{yy}^* \tag{61}$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{1024 - 51\pi}{1536}\right)h^4}} \tag{62}$$

Berechnung von $I_{zz}$:

| Teilkörper | $A_i$ | $a_i = y_{Si} - y_S$ | $a_i^2 Ai$ | $I_{zz}^*$ |
|---|---|---|---|---|
| I | $2h^2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}h^4$ |
| II | $-\frac{\pi h^2}{16}$ | 0 | 0 | $\frac{-\pi h^4}{1024}$ |
| III | $-\frac{\pi h^2}{16}$ | 0 | 0 | $\frac{-\pi h^4}{1024}$ |
| I-II-III | / | – | 0 | $\left(\frac{256-3\pi}{1536}\right)h^4$ |

$$\Rightarrow \quad I_{zz} = \sum a_i^2 A_i + \sum I_{zz}^* \tag{63}$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{256 - 3\pi}{1536}\right)h^4}} \tag{64}$$

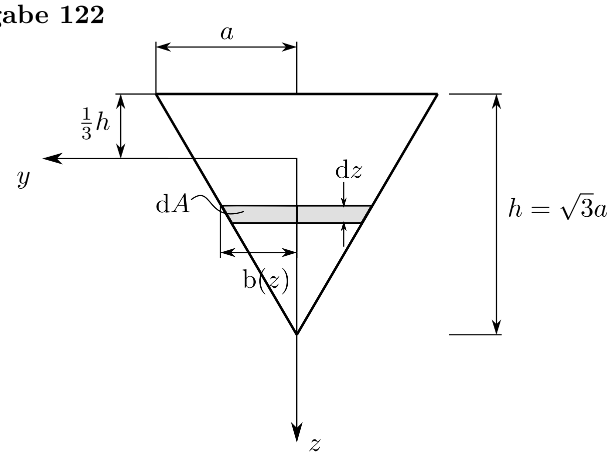
Berechnung von $I_{yz}$:

| Teilkörper | $A_i$ | $a_i = y_{Si} - y_S$ | $b_i = z_{Si} - z_S$ | $a_i b_i Ai$ | $I_{yz}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $2h^2$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | $-\frac{\pi h^2}{16}$ | 0 | $-\frac{h}{2}$ | 0 | 0 |
| III | $-\frac{\pi h^2}{16}$ | 0 | $\frac{h}{2}$ | 0 | 0 |
| I-II-III | / | 0 | – | 0 | 0 |

$$\Rightarrow \quad I_{yz} = \sum -a_i b_i A_i + \sum I_{yz}^* = \underline{\underline{0}} \tag{65}$$

Merke: Das Deviationsmoment bezüglich der Symmetrieachsen verschwindet immer.

## Aufgabe 122




$$I_y = \int_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{2}{3}h} z^2 \,\mathrm{d}A \tag{66}$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2 2\,\mathrm{b}(z)\mathrm{d}z \tag{67}$$

b($z$) ist als Geradengleichung der Dreieckskante aufzufassen:

$$\mathrm{b}(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3}a\,. \tag{68}$$

Damit ergibt sich für $I_y$:

$$I_y = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2(-\frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3}a)\,\mathrm{d}z \tag{69}$$

$$= 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} (-\frac{1}{\sqrt{3}}z^3 + \frac{2}{3}az^2)\,\mathrm{d}z \tag{70}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}z^4 + \frac{2}{9}az^3\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \tag{71}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{16}{9}a^4 + \frac{2}{9}\frac{8}{3\sqrt{3}}a^4 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{9}a^4 + \frac{2}{9}\frac{1}{3\sqrt{3}}a^4\right] \tag{72}$$

$$= 2a^4\left[-\frac{15}{4\sqrt{3}\,9} + \frac{18}{3\sqrt{3}\,9}\right] = \left[-\frac{5}{6} + \frac{4}{3}\right]\frac{a^4}{\sqrt{3}} \tag{73}$$

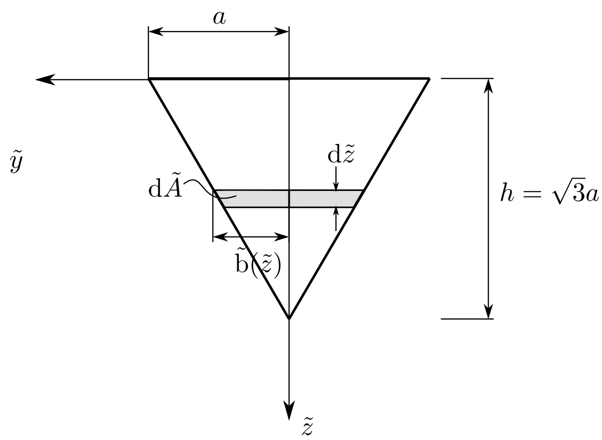
$$I_y = \underline{\underline{\frac{1}{6}\sqrt{3}\,a^4}} \tag{74}$$

Um die Integration zu vereinfachen kann die Aufgabe auch mit Hilfe des Steinerschen Satzes gelößt werden. Es gilt:

$$I_{\tilde{y}} = I_y + \tilde{z}_s^2 A \tag{75}$$

$$\Rightarrow I_y = I_{\tilde{y}} - \tilde{z}_s^2 A \tag{76}$$

wobei $\tilde{z}_s = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ ist und $A = \sqrt{3}\,a^2$ ist.




$\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a$ und für $\mathrm{d}\tilde{A}$ gilt $\mathrm{d}\tilde{A} = 2\,\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z}$. Damit ergibt sich für $I_{\tilde{y}}$:

$$I_{\tilde{y}} = \int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2 2\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{77}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2(-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a)\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{78}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}a} (-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z}^3 + a\tilde{z}^2)\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{79}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}\tilde{z}^4 + \frac{1}{3}a\tilde{z}^3\right]_0^{\sqrt{3}a} \tag{80}$$

$$= -\frac{1}{2}3\sqrt{3}a^4 + \frac{4\sqrt{3}}{2}a^4 \tag{81}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^4\,. \tag{82}$$

Schließlich ergibt sich für $I_y$:

$$I_y = \frac{1}{2}\sqrt{3}a^4 - \frac{1}{3}\sqrt{3}a^4 \tag{83}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a^4}} \tag{84}$$