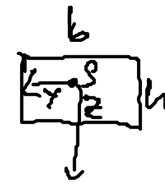
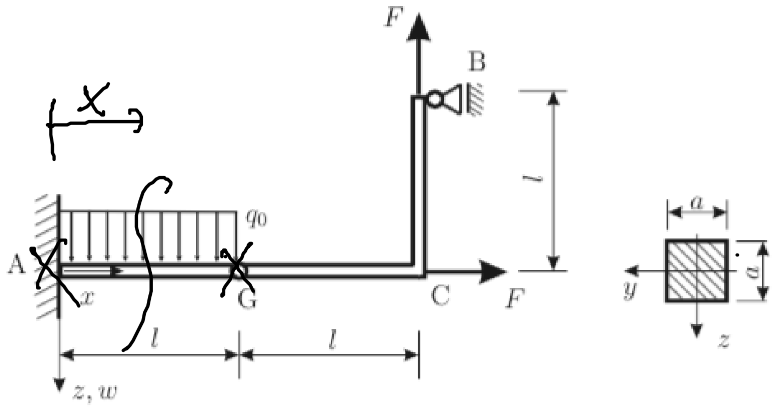
1 **(1+4+3+4+4+4 Punkte)**

$I_{yy} = \frac{h^3 b}{12}$

$I_{yy} = \frac{a^4}{12}$



Das skizzierte Tragwerk ist im Bereich AG durch eine konstante Streckenlast q_0 sowie in Punkten C und B duch einzelne Kräfte F belastet.



(a) Begründen Sie die statische Bestimmtheit des skizzierten Tragwerkes.

(b) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen und die Gelenkkräfte.

(c) Berechen Sie mit dem Schnittverfahren das Biegemoment im Bereich AG.

(d) Rechnen Sie im folgenden mit dem Biegemomentverlauf

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{1}{2}q_0 l x$$

weiter. An welcher Stelle $\hat{x}$ im Bereich AG tritt das maximale Biegemoment $M(\hat{x})$ auf? Geben Sie seinen Betrag $|M(\hat{x})|$ an.

(e) Ausgehend vom in (d) gegebenem Biegemoment $M(x)$ bestimmen Sie die Biegelinie im Bereich AG.

(f) Geben Sie das axiale Flächenträgheitsmoment I_y des quadratischen Balkenquerschnitts mit der Kantenlänge a an. Wie groß muss a sein, damit die maximale Normalspannung σ_{max} im Balken AG nicht die zulässige Normalspannung σ_{zul} übersteigt?
Hinweis: Das eingezeichnete Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Flächenschwerpunkt der Querschnittsfläche.

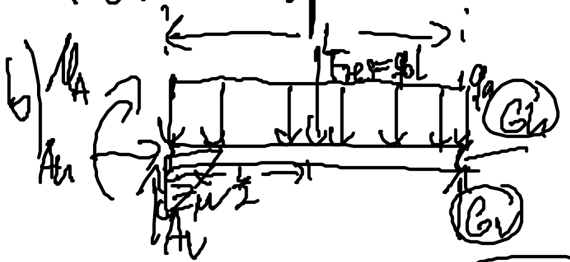
Geg.: F, q_0, l, σ_{zul}, E

a) Statische Bestimmtheit

$2 \times 3FHG = 3+1+2 \Rightarrow 6 = 6$

nicht vorspannbar und nicht beweglich

b)



$\sum_i F_{xi} \overset{!}{=} 0 = A_h - G_h \Rightarrow A_h = G_h = -2F$

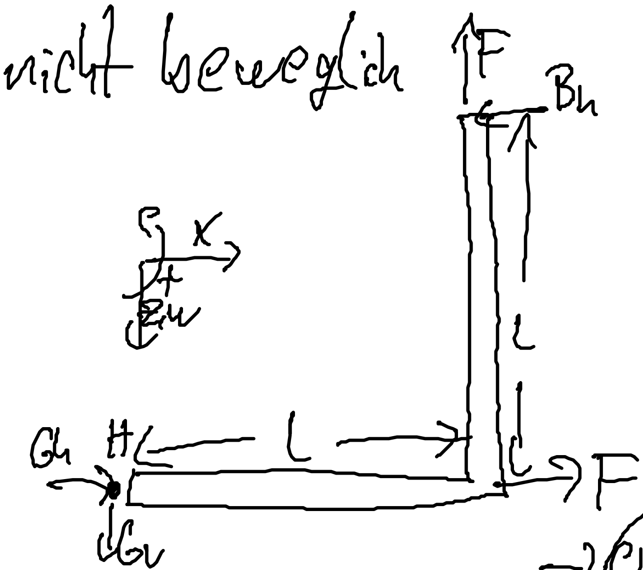
$\sum_i F_{zi} \overset{!}{=} 0 = -A_v - G_v + q_0 l$

$A_v = -F + q_0 l$

$\sum_i M_{yi}^{(A)} \overset{!}{=} 0 = -M_A - \frac{L}{2} q_0 l + LF$

$M_A = -\frac{q_0 l^2}{2} + LF$

$x := \sum_i F_{xi}$

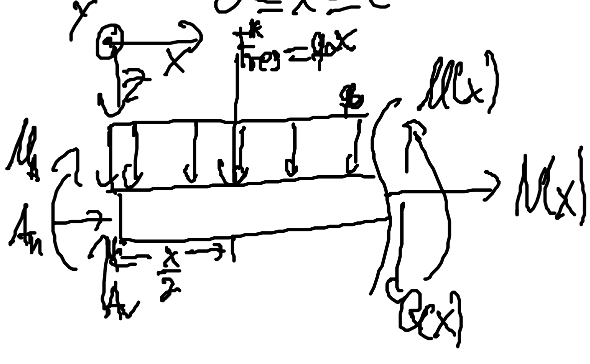


$\sum_i F_{xi} \overset{!}{=} 0 = G_h + F - B_h \Rightarrow G_h = -F - F = -2F$

$\sum_i F_{zi} \overset{!}{=} 0 = G_v - F \Rightarrow G_v = F$

$\sum_i M_{yi}^{(H)} \overset{!}{=} 0 = \cancel{L}F + \cancel{L}B_h \Rightarrow B_h = -F$

$0 \le x \le L$



$\sum_i M_{yi}^{(x)} \overset{!}{=} 0 = -M_A + M(x) - A_v x + q_0 \frac{x^2}{2}$

$M(x) = -\frac{q_0 l^2}{2} + LF + (-F + q_0 l)x - q_0 \frac{x^2}{2}$

$M(x) = -\frac{q_0 l^2}{2} + LF - Fx + q_0 l x - q_0 \frac{x^2}{2}$

$$M(x) = -q_0\frac{x^2}{2} - Fx + lq_0x + LF - q_0\frac{l^2}{2}$$

---

d) ges.: $\hat{x}, |M(\hat{x})|$

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{2}q_0lx$$

$$M'(x) (= Q(x)) = -q_0x + \frac{1}{2}q_0l \Rightarrow M'(\hat{x}) = 0 = -q_0\hat{x} + \frac{1}{2}q_0l$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{l}{2}$$

$$|M(\hat{x})| = \left| -\frac{1}{2}q_0\frac{l^2}{4} + \frac{1}{2}q_0\frac{l^2}{2} \right| = \frac{1}{8}q_0l^2$$

$$M(0) = 0$$

$$M(l) = 0$$

---

e) $M(x) = -\frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{2}q_0lx = -EIw''(x)$

$$-\frac{1}{6}q_0x^3 + \frac{1}{4}q_0lx^2 + \cancel{C_1} = -EIw'(x)$$

$$-\frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{12}q_0lx^3 + \cancel{C_1x} + \cancel{C_2} = -EIw(x)$$

$w(0) = 0$ $\quad 0 + 0 + 0 + C_2 = -EI \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$w'(0) = 0$ $\quad 0 + 0 + C_1 = -EI \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

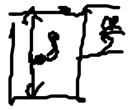
$$w(x) = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{12}q_0lx^3\right)$$

---

f) $I_{yy} = \frac{a^4}{12}$

$$\sigma = \frac{M_y}{I_{yy}}z - \cancel{\frac{M_z}{I_{zz}}y} + \cancel{\frac{N}{A}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y\,max}}{I_{yy}} z_{max}$$



$$\sigma_{max} = \left| \frac{\frac{1}{8} q_0 l^2}{\frac{a^4}{12}} \frac{a}{2} \right| = \frac{12}{8 \cdot 2} \frac{q_0 l^2}{a^3} = \frac{3}{4} \frac{q_0 l^2}{a^3}$$

Grenzbetrachtung

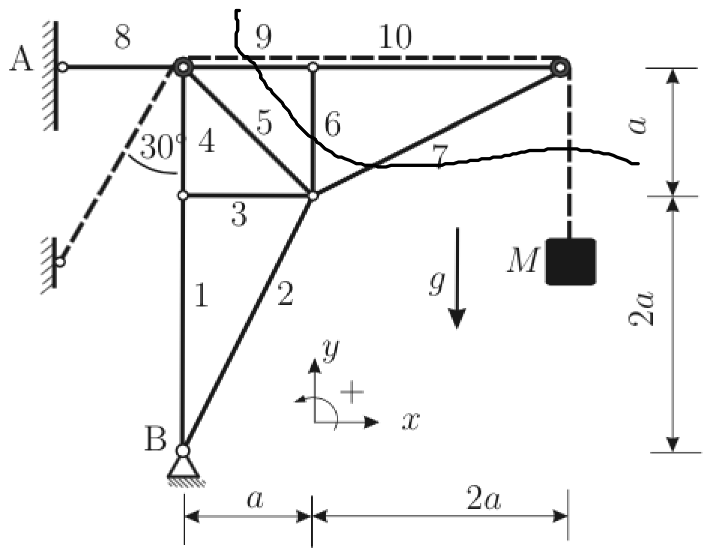
$$\sigma_{zul} = \frac{3}{4} \frac{q_0 l^2}{a^3} \Leftrightarrow a^3 = \frac{3}{4} \frac{q_0 l^2}{\sigma_{zul}}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3 q_0 l^2}{4 \sigma_{zul}}}$$

---

2 **(4+6 Punkte)**

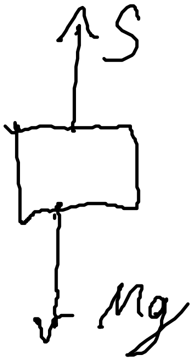
Gegeben ist der skizzierte Kranausleger. Am Tragseil hängt ein Gewicht der Masse M. Das masselose Tragseil wird über zwei masselose und reibungsfreie Rollen (der Radius ist vernachlässigbar klein) geführt.

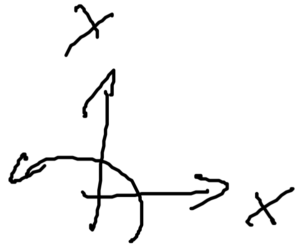


(a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktion in A und B sowie die Seilkraft S.

(b) Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben 6, 7 und 9 und geben Sie an, ob die Stäbe auf Zug oder Druck beansprucht sind. (Werten Sie die trigonometrischen Funktionen aus und vereinfachen Sie das Endergebnis.)

Geg.: M, g, a

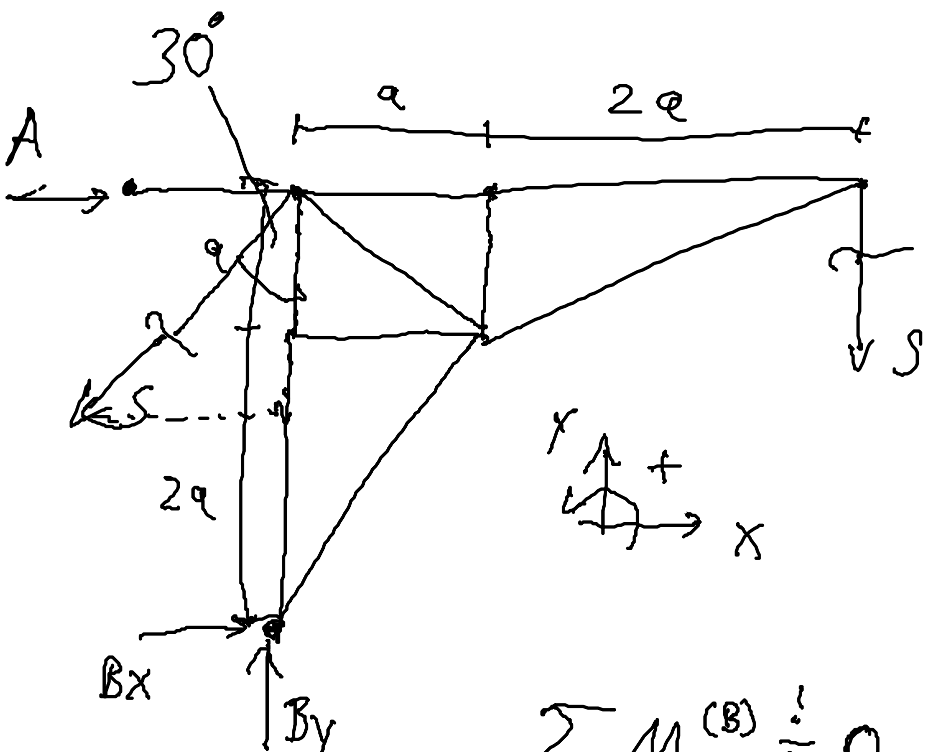




$$\sum F_y \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = S - Mg$$

$$\boxed{S = Mg}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sum M^{(B)} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = -3a \cdot S - 3a \cdot A + \sin 30^\circ S\, 3a$$

$$\cancel{3a} A = -\cancel{3a} S + \frac{1}{2} \cdot \cancel{3a} S$$

$$A = -\frac{1}{2} S = \underline{\underline{-\frac{Mg}{2}}}$$

$$\sum F_x \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = A + B_x - \sin 30^\circ S$$

$$B_x = -A + \frac{1}{2} S$$

$$B_x = \frac{Mg}{2} + \frac{Mg}{2} = \underline{\underline{Mg}}$$

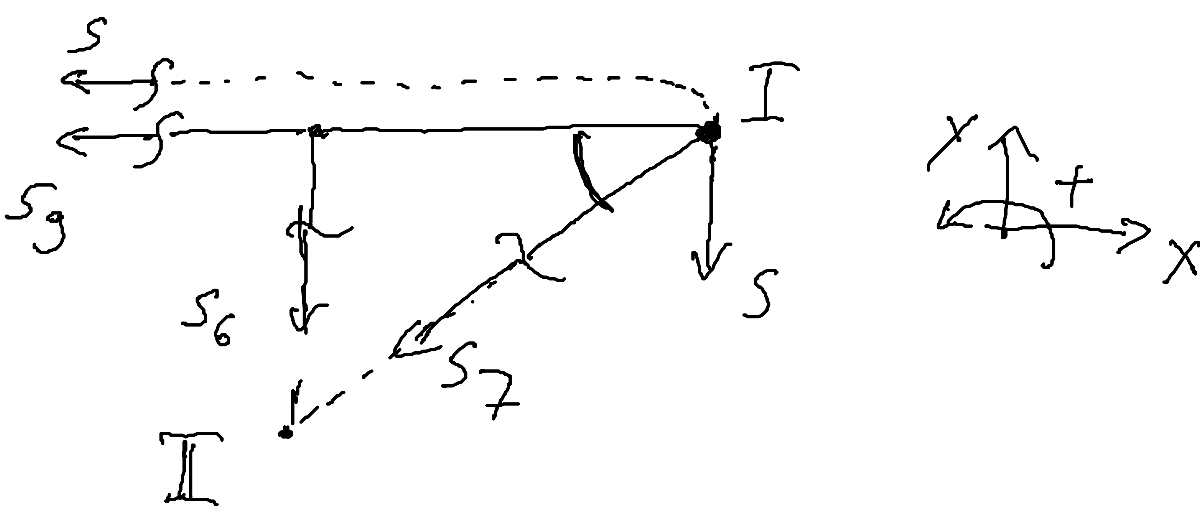
$$\sum F_y \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = B_y - S - \cos 30^\circ S$$

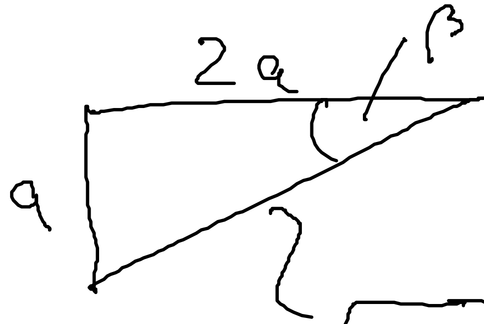
$$B_y = S + \frac{\sqrt{3}}{2} S$$

$$= \underline{\underline{Mg\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

b)



NR



$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta = \frac{2a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}\,a$$

$$\sum M^{(I)} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = 2a\,S_6 \quad \Rightarrow \boxed{S_6 = 0}$$

Nullstab

$$\sum M^{(II)} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = -2\cancel{a}S + S \cdot \cancel{a} + S_9 \cdot \cancel{a}$$

$$S_9 = S = \underline{\underline{Mg}} \quad \longrightarrow \text{Zugstab}$$

$$\sum F_y \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\cancel{S_6} - S - S_7 \cdot \sin\beta$$

$$S_7 = \frac{-Mg\sqrt{5}}{1} = \underline{\underline{-\sqrt{5}\,Mg}} \rightarrow \text{Druc}$$

$\boxed{3}$ (Bekannte Aufgabe) **(10 Punkte)**

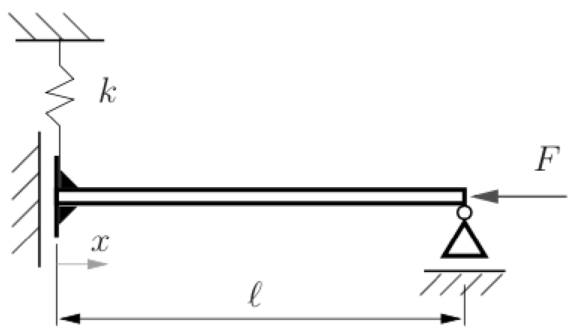
Der dargestellte Balken der Länge ℓ ist mit einer Normalkraft $F > 0$ belastet. Es soll das Knickproblem untersucht werden. In der gezeichneten Ausgangslage ist die Feder entspannt.

(a) Wie lautet die Differentialgleichung für das Knickproblem (Knickgleichung) und ihre allgemeine Lösung?

(b) Ermitteln sie alle erforderlichen Randbedingungen.

(c) Stellen sie das Gleichungssystem zur Berechnung der in der allgemeine Lösung auftretenden Konstanten auf und bestimmen sie die Eigenwertgleichung.

(d) Wie lautet die kritische Last F_{krit} für den Fall, dass die Feder unendlich weich ist?



Geg.: ℓ, EI, F, k

a) Knick-DGL: $w^{IV}(x) + \lambda^2 w''(x) = 0$, $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$

$\Rightarrow$ $w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\lambda x + D$ (allg. Lsg.)

- $w'(x) = \lambda(-A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C)$
- $w''(x) = \lambda^2(-A\cos(\lambda x) - B\sin(\lambda x))$
- $w'''(x) = \lambda^3(A\sin(\lambda x) - B\cos(\lambda x))$

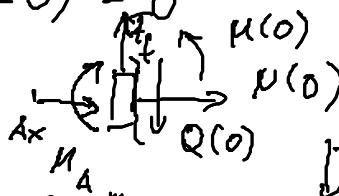
b) RB im ausgelenkten System

I: $M(x=\ell) = \cancel{-EI}\, w''(\ell) = 0$

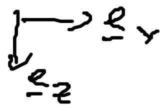
II: $w(x=\ell) = 0$

III: $w'(x=0) = 0$

FS bei $x=0$



$F_f = k \cdot \Delta l = k \cdot w(0)$



$\sum F_z = Q(0) - F_f \overset{!}{=} 0$

IV: $k \cdot w(0) + EI w'''(0) = 0$

$\Rightarrow Q(0) = F_f$

$\Rightarrow -EI w'''(0) = k \cdot w(0)$

c) I: $w''(l) = -\cancel{\lambda^2}\left(+A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l)\right) = 0$

II: $w(l) = A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) + C\lambda l + D = 0 \Leftrightarrow D = -C\lambda l$

III: $w'(0) = \cancel{\lambda}(B + C) = 0 \Leftrightarrow C = -B \nearrow = B \cdot \lambda l$

IV: $k \cdot (A + D) + EI\lambda^3 \cdot (-B) = 0$

I: $A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) = 0$

IV: $k \cdot (A + B\lambda l) + EI\lambda^3(-B) = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) \\ k & k\lambda l - EI\lambda^3 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{K}}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ nur nichttriviale Lösungen, falls $\det(\underline{\underline{K}}) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\lambda l)\left(k\lambda l - EI\lambda^3\right) - k\sin(\lambda l) \overset{!}{=} 0}$$ (Eigenwertgleichung)

d) ges: F_{krit} für $k = 0$

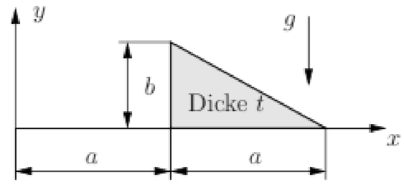
$$\cos(\lambda l)\left(\cancel{-EI\lambda^3}\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 l = \frac{\pi}{2}$

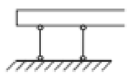
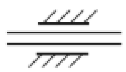
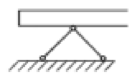
$$\Rightarrow F_{krit} = \lambda_1^2 \cdot EI = \underline{\underline{EI \cdot \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2}}$$

1. Bezüglich welchen Punktes P auf der x-Achse verschwindet das resultierende Moment der Gewichtskraft der homogenen Scheibe konstanter Dicke?

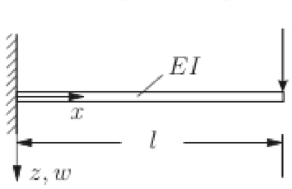


$x_P =$

2. Geben Sie zu jedem Lager die Wertigkeit im ebenen Fall an.

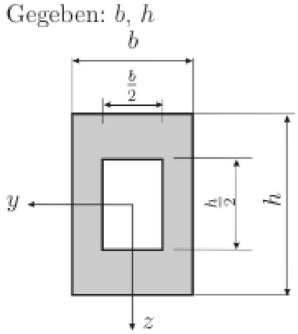
 ☐  ☐  ☐

3. Die Durchsenkung einer Biegefeder unter gezeigten Belastung ist $w(l) = \frac{Fl^3}{3EI}$. Wie groß ist ihre Federsteifigkeit? Gegeben: F, EI, l



$k =$

4. Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_y der dargestellten Querschnittsfläche ?
Gegeben: b, h



I_y

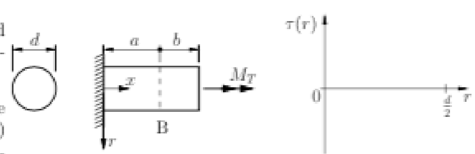
5. Wie lautet die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit von ebenen Fachwerken? Benennen Sie die in Ihrer Formel auftretenden Größen.

6. Welche Größenordnung hat der Schubmodul G für Stahl?

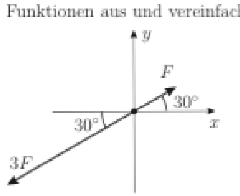
☐ $G \approx 80Pa$ ☐ $G \approx 80KPa$ ☐ $G \approx 80GPa$

7. Eine kreiszylindrische Welle wird am rechten Ende durch das Torsionsmoment M_T belastet.

Zeichnen Sie schematisch die Schubspannungsverteilung $\tau(r)$ im Querschnitt B in das Diagramm ganz rechts ein!

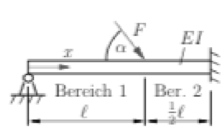


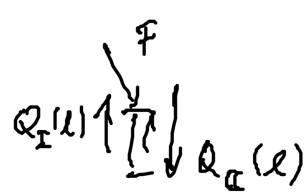
8. Wie groß ist die x-Komponente der resultierende Kraft? (Werten Sie die trigonometrischen Funktionen aus und vereinfachen Sie das Endergebnis.)



$R_x =$

9. Geben Sie alle Übergangsbedingungen an der Krafteinleitungsstelle ($x = \ell$) an, die für die Berechnung der Durchbiegung mit der Biegeliniendifferentialgleichung erforderlich sind.





10. Zeichnen Sie die 2 Knickeigenformen für das skizzierte, gelenkig gelagerte System starrer Balken!