Kinematik der einachsigen/räumlichen Bewegung

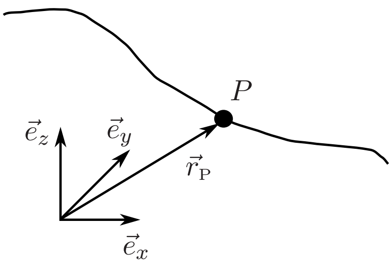
1. Kinematik des Massenpunktes

Unter Kinematik versteht man rein mathematische und geometrische Methoden zur Beschreibung von Bewegungen:

- Weg: $x(t)$, Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$, Beschleunigung: $a(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}(t)$
- Einheiten: $[x(t)] = m, [v(t)] = \frac{m}{s}, [a(t)] = \frac{m}{s^2}$

Die räumliche Bewegung eines Massenpunktes P wird über Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor beschrieben $(\vec{r}_\mathrm{P}(t), \vec{v}_\mathrm{P}(t), \vec{a}_\mathrm{P}(t))$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\mathrm{P} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\
\vec{v}_\mathrm{P} &= \dot{\vec{r}}_\mathrm{P} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_\mathrm{P}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\
\vec{a}_\mathrm{P} &= \ddot{\vec{r}}_\mathrm{P} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_\mathrm{P}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z
\end{aligned}$$



2. Mathematik

Bei Kenntnis nur einer der Größen $x(t), v(t)$ oder $a(t)$ können durch Ableitung bzw. Integration und Kenntnis der Anfangsbedingung die beiden anderen Größen bestimmt werden.

Beispiel zur Integration: Für den Geschwindigkeitsverlauf $v(t) = \hat{v}\cos\omega t$ mit der Anfangsbedingung $s(t=0) = s_0$ ergibt sich der Weg $s(t)$ zu:

Bestimmte Integration:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= v(t)\mathrm{d}t\ , \\
\int_{s_0}^{s(t)} \mathrm{d}s &= \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} v(\tilde{t})\ \mathrm{d}\tilde{t} = \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \hat{v}\cos\omega\tilde{t}\ \mathrm{d}\tilde{t}\ , \\
s(t) - s_0 &= \left[\frac{\hat{v}}{\omega}\sin\omega\tilde{t}\right]_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t}\ , \\
s(t) &= \frac{\hat{v}}{\omega}\sin\omega t + s_0\ .
\end{aligned}$$

Unbestimmte Integration:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= v(t)\ \mathrm{d}t\ , \\
s(t) &= \int v(t)\ \mathrm{d}t + C = \int \hat{v}\cos\omega t\ \mathrm{d}t + C\ , \\
s(t) &= \frac{\hat{v}}{\omega}\sin\omega t + C\ , \quad s(t=0) = s_0 \Rightarrow C = s_0\ , \\
s(t) &= \frac{\hat{v}}{\omega}\sin\omega t + s_0\ .
\end{aligned}$$

Prinzip der Trennung der Variablen: nützlich, wenn a nicht explizit von t abhängig ist.

Wegabhängikgeit: $a = a(x)$

$$a(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

$$\boxed{a(x)\ \mathrm{d}x = v\mathrm{d}v}$$

Geschwindigkeitsabhängigkeit: $a(v)$

$$a(v) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

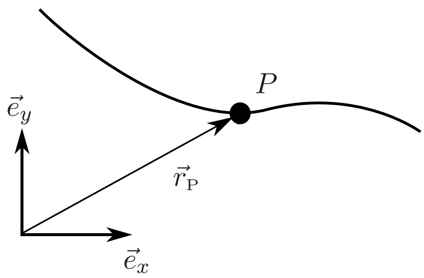
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{a(v)} = \mathrm{d}t}$$

Räumliche Bewegung, Polarkoordinaten

1. Kartesische Koordinaten (ebene Bewegung)

Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in kartesischen Koordinaten:

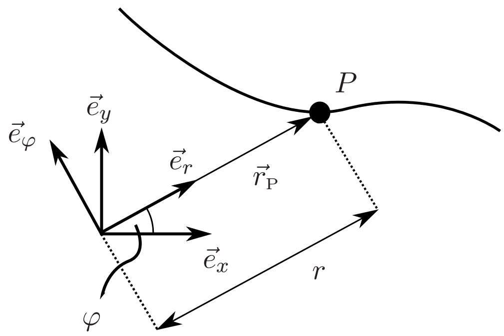
$$\vec{r}_{\mathrm{P}} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \dot{\vec{r}}_{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$
$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \ddot{\vec{r}}_{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$



2. Polarkoordinaten (ebene Bewegung)

Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in polaren Koordinaten:

$$\vec{r}_{\mathrm{P}} = r\vec{e}_r,$$
$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$
$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi.$$

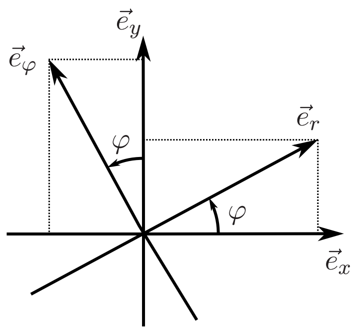


3. Koordinatentransformation

Zwischen den kartesischen und den polaren Koordinaten gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x = \cos\varphi\vec{e}_r - \sin\varphi\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{e}_y = \sin\varphi\vec{e}_r + \cos\varphi\vec{e}_\varphi$$



4. Zylinderkoordinaten

Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in zylindrischen Koordinaten:

$$\vec{r}_{\mathrm{P}} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z,$$
$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z,$$
$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Das 2. Newtonsche Gesetz, Federkräfte, Reibung

1. Das 2. Newtonsche Gesetz

Vektorielle Schreibweise:

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}$$

Schreibweise in Komponenten:

$$\begin{aligned} x\text{-Richtung:} \quad & ma_x = \sum F_x \\ y\text{-Richtung:} \quad & ma_y = \sum F_y \\ z\text{-Richtung:} \quad & ma_z = \sum F_z \end{aligned}$$

Beispiel zum 2.N.G.: Bei Kenntnis der Kraft $F(t)$ kann die Bewegung durch Integrieren bestimmt werden:

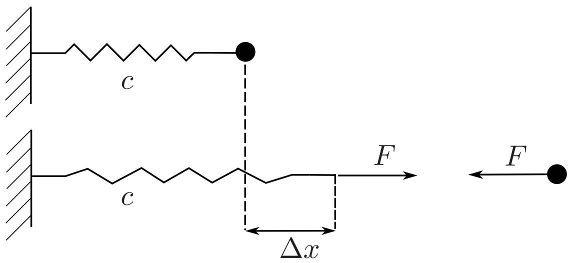
$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{F(t)}{m} = \frac{\hat{F}\sin\omega t}{m}, \\ \dot{x}(t) &= \int \frac{\hat{F}\sin\omega t}{m}\,\mathrm{d}t + C_1 = \frac{\hat{F}}{m}\int \sin\omega t\,\mathrm{d}t + C_1 = \frac{-\hat{F}}{m\omega}\cos\omega t + C_1\,, \\ x(t) &= \int \left(\frac{-\hat{F}}{m\omega}\cos\omega t + C_1\right)\mathrm{d}t + C_2\,. = \frac{-\hat{F}}{m\omega^2}\sin\omega t + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind durch Anfangsbedingungen zu bestimmen.

2. Feder

Feder mit linearer Charakteristik:

$$\begin{aligned} F =& c\Delta x \\ c :=& \text{Steifigkeit der Feder} \\ [c] =& \text{N/m} \end{aligned}$$



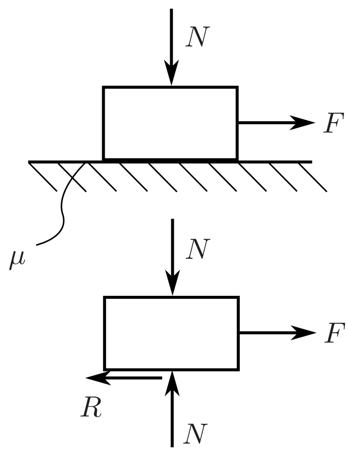
3. Haftreibung und Gleitreibung

Haftreibung:

$$\begin{aligned} R_s =& \mu_s N \\ \mu_s :=& \text{statischer Reibungskoeffizient} \end{aligned}$$

Gleitreibung:

$$\begin{aligned} R_k =& \mu_k N \\ \mu_k :=& \text{Gleitreibungskoeffizient} \\ [\mu] =& 1 \end{aligned}$$



Newtonsche Axiome, Impulserhaltung

1. Impuls

Impuls eines Körpers:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Impuls eines Mehrkörpersystems:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Impulssatz (Form des 2.Newtonschen Gesetzes):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

2. Kraftstoss

Kraftstoss:

$$\hat{\vec{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t$$

Integrale Form des Impulssatzes:

$$\hat{\vec{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

3. Impulserhaltung

Der Impuls eines *abgeschlossenen* Systems bleibt erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0,$$
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

4. Impulssatz

Die zeitliche Ableitung des Impulses eines Systems ist gleich der Summe aller *äußeren* Kräfte, die auf das System wirken:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ext}$$

Energie- und Arbeitssatz

1. Arbeitssatz

$$\boxed{W_{12} = K_2 - K_1}$$

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad \text{Kinetische Energie des Körpers}$$

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \text{Von } \vec{F} \text{ auf dem Weg zwischen } \vec{r}_1 \text{ und } \vec{r}_2 \text{ geleistete Arbeit}$$

Zwangskräfte leisten keine Arbeit, da sie stets senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichtet sind.

2. Konservative Kräfte und nicht-konservative Kräfte

Eine Kraft heißt **konservativ**, wenn die auf einem beliebigen geschlossenen Weg geleistete Arbeit verschwindet:

$$\boxed{W = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$$

Sind **alle** eingeprägten Kräfte **konservativ**, folgt aus dem Arbeitssatz der **Energieerhaltungsatz**:

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1}$$

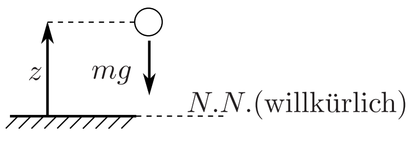
Treten zusätzlich **nicht-konservative** Kräfte auf, ergibt sich der **Arbeitssatz** zu:

$$\boxed{K_2 + U_2 - W_{12nicht-konservativ} = K_1 + U_1}$$

3. Potentielle Energie

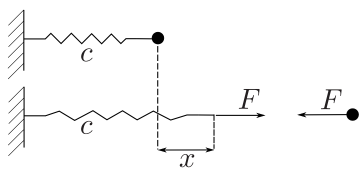
Potentielle Energie der Schwerekraft:

$U = mgz,$ für das dargestellte Nullniveau



Potentielle Energie einer Feder:

$U = \frac{1}{2} c x^2,$ für eine lineare Charakteristik

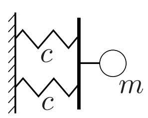


4. Kombination von Federn

Kombinationen von Federn können durch die zugehörigen Ersatzfedersteifigkeiten ersetzt werden:

Reihenschaltung von Federn : $\frac{1}{c_{\text{ges}}} = \sum_i \frac{1}{c_i},$

Parallelschaltung von Federn : $c_{\text{ges}} = \sum_i c_i$

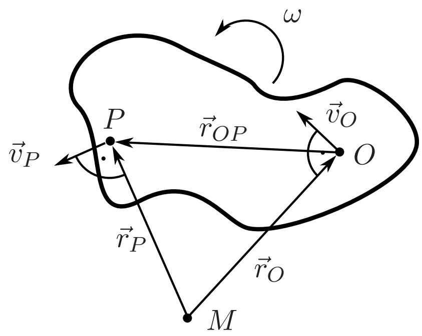


Kinematik des starren Körpers

1. Kinematik des starren Körpers

Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers setzt sich aus Translation und Rotation zusammen. Seien O und P Punkte auf einem starren Körper. Dann gilt:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_O + \vec{r}_{OP}$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP}$$



Momentanpol M: Punkt bezüglich dessen die ebene Körperbewegung als reine Drehbewegung beschrieben werden kann (allgemein nicht ortsfest)

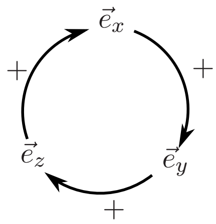
2. Kreuzprodukt

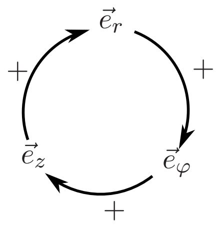
Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist definiert als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Für die Basisvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ gilt:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_x &= -\vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_y &= -\vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y, & \vec{e}_x \times \vec{e}_z &= -\vec{e}_y \end{aligned}$$



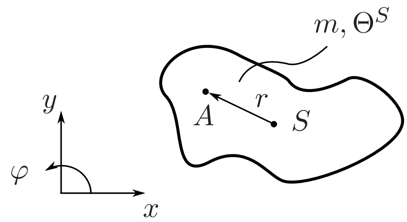


Ebene Dynamik des starren Körpers, MTM

1. Ebene Dynamik des starren Körpers

Schwerpunktsatz in der Ebene:

$$m\ddot{x}_s = F_x \quad \& \quad m\ddot{y}_s = F_y$$



Drehimpulssatz in der Ebene:

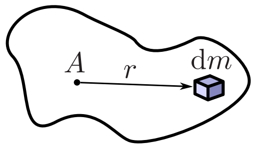
$$\Theta^{(A)}\ddot{\varphi} = M^{(A)}$$

Mit Θ^A, dem Massenträgheitsmoment bezüglich des Punktes A (auf dem starren Körper festliegender Punkt, der entweder dem Schwerpunkt entspricht oder raumfest ist).

2. Massenträgheitsmoment

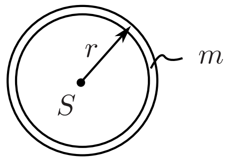
Massenträgheitsmoment bezüglich des Punktes A:

$$\Theta^{(A)} = \int r^2 \mathrm{d}m$$

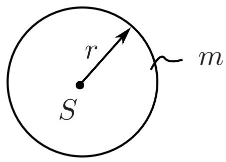


Massenträgheitsmomente ausgewählter Körper bezüglich S:

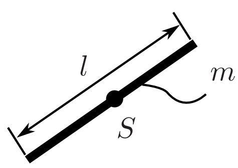
$$\Theta^{(S)} = mr^2 \quad \text{dünner Kreisring:}$$



$$\Theta^{(S)} = \frac{1}{2}mr^2 \quad \text{dünne Scheibe:}$$



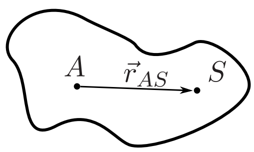
$$\Theta^{(S)} = \frac{1}{12}ml^2 \quad \text{dünner Stab:}$$



3. Satz von Steiner

Massenträgheitsmoment bezüglich des Punktes A:

$$\Theta^{(A)} = \Theta^{(S)} + m\vec{r}_{AS}^{\,2}$$



Schwerpunkt- und Drehimpulssatz, Arbeitssatz

1. Trägheitstensor

$$\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} m_k \begin{pmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -y_k x_k & x_k^2 + z_k^2 & -y_k z_k \\ -z_k x_k & -z_k y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix}$$

$$= \int_B \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dm$$

Bezüglich eines Hauptachsensystems verschwinden die Deviationsmomente (Nebendiagonaleinträge). Bei homogenen, symmetrischen Körpern sind die Symmetrieachsen immer Hauptachsen.

Beispiel: Ein dünner Kreisring (Masse m, Radius r) dessen Symmetrieachse z sei, hat bezüglich seines Schwerpunktes (S) den folgenden Trägheitstensor:

$$\underline{\Theta}^{(S)} = \begin{pmatrix} \Theta_x^{(S)} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y^{(S)} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z^{(S)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}$$

2. Arbeitssatz und Energieerhaltungssatz

Arbeitssatz für starre Körper:

$$\boxed{W_{12} = K_2 - K_1}, \quad \text{beziehungsweise:} \quad \boxed{\tilde{W}_{12} = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)}$$

Allgemeiner, räumlicher Fall:

$$K_i = \frac{1}{2} m \vec{v}_s^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\Theta}^{(S)} \vec{\omega} \qquad \text{Kinetische Energie des Körpers}$$

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{\varphi}_1}^{\vec{\varphi}_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi} \qquad \text{Arbeit der eingeprägten Kräfte \textbf{und} Momente}$$

$\tilde{W}_{12}$ Arbeit der **nicht-konservativen** eingeprägten Kräfte **und** Momente

Ebener Fall:

$$K_i = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \omega^2 \qquad \text{Kinetische Energie des Körpers}$$

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \mathrm{d}\varphi \qquad \text{Arbeit der eingeprägten Kräfte \textbf{und} Momente}$$

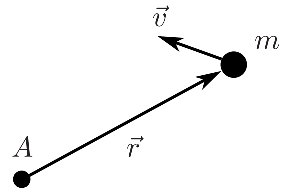
Sind **alle** eingeprägten Kräfte und Momente **konservativ**, folgt aus dem Arbeitssatz der Energieerhaltungssatz:

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1}$$

Drehimpulserhaltung, exzentrischer Stoß

1. Drehimpuls

Drehimpuls für einen Massepunkt:



$$\vec{L}^{(A)} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Drehimpuls eines Starrkörpers in der Ebene:

$$L^{(A)} = \Theta^{(A)}\omega$$

Drehimpuls eines Starrkörpers im allgemeinen Fall:

$$\vec{L}^{(A)} = \underline{\Theta}^{(A)} \cdot \vec{\omega}$$

Mit Θ^A, dem Massenträgheitsmoment ($\underline{\Theta}^A$ Trägheitstensor) bezüglich des Punktes A (auf dem starren Körper festliegender Punkt, der entweder dem Schwerpunkt entspricht oder raumfest ist).

2. Drehimppulssatz und Drehimpulsserhaltung

Drehimpulssatz in differentieller Form:

$$\dot{\vec{L}}^{(A)} = \vec{M}^{(A)} = \underline{\Theta}^{(A)} \cdot \frac{d^*\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}^{(A)} = \underline{\Theta}^{(A)} \cdot \frac{d^*\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \underline{\Theta}^{(A)} \cdot \vec{\omega}$$

Die Ableitung $d^*\vec{\omega}/dt$ meint die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit in einem körperfesten Koordinatensytem.

Drehimpulssatz in integraler Form:

$$\vec{L}^{(A)}(t_2) - \vec{L}^{(A)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}^{(A)} \mathrm{d}t$$

Im Falle $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}^{(A)} \mathrm{d}t = 0$ folgt hieraus der Drehimpulserhaltungssatz:

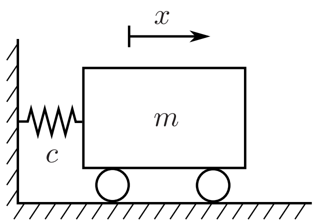
$$\vec{L}^{(A)}(t_2) = \vec{L}^{(A)}(t_1)$$

Der Drehimpuls bezüglich eines bestimmten Punktes bleibt somit erhalten, wenn das gesamte Moment aller angreifenden Kräfte bezüglich desselben Punktes verschwindet.

Gedämpfte und ungedämpfte freie Schwingungen

1. Freie, ungedämpfte Schwingungen mit einem FHG

Bewegungs-DGL für die freie, ungedämpfte Schwingung:



$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Allgemeine Form:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit:

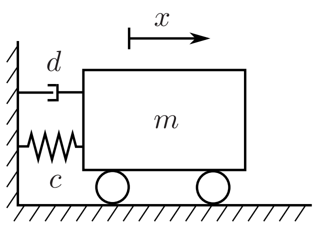
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{(Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung)}$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

2. Freie, gedämpfte Schwingungen mit einem FHG

Bewegungs-DGL für die freie, gedämpfte Schwingung:



$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0$$

Allgemeine Form:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{(Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung)}, \quad 2\delta = \frac{d}{m} \quad \text{(Abklingkoeffizient)}$$

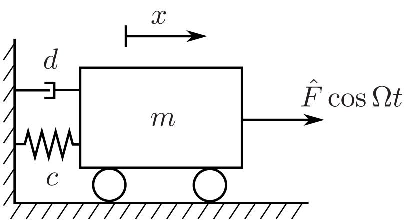
Allgemeine Lösung für den Fall schwacher Dämpfung ($\delta^2 < \omega_0^2$):

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) \quad \text{mit:} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Erzwungene Schwingungen

1. Anregung durch eine harmonisch veränderliche Kraft

Bewegungs-DGL für das gedämpfte Feder-Masse System :



$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = \hat{F}\cos\Omega t$$

Allgemeine Form:

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m}\cos\Omega t$$

mit:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} \quad \text{(Dämpfungsgrad)}, \quad 2\delta = \frac{d}{m} \quad \text{(Abklingkoeffizient)}$$

Die Gesamtlösung $x(t)$ setzt sich aus der homogenen Lösung $x_h(t)$ und der partikulären $x_p(t)$ Lösung zusammen:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t), \quad \text{mit:} \\ x_h(t) &= e^{-\delta t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) \quad \text{mit:} \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2} \\ x_p(t) &= \hat{x}\cos\left(\Omega t - \Theta\right) \end{aligned}$$

Hierin sind:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{c}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{\hat{F}}{c}V(\eta) \qquad \text{(Amplitude)}$$

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}} \qquad \text{(Vergrößerungsfunktion oder Amplitudenfrequenzgang)}$$

$$\Theta = \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2} \qquad \text{(Phasenverschiebung oder Phasenfrequenzgang)}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} \qquad \text{(Frequenzverhältnis)}$$

Je nach Art der Anregung ergeben sich unterschiedliche Vergrößerungsfunktionen und Phasenverschiebungen (siehe Skript).

2. Trigonometrische Funktionen und imaginäre Exponenten

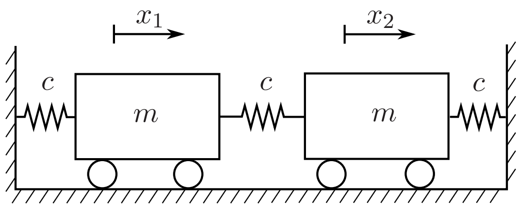
$$e^{i\Omega} = \cos(\Omega) + i\sin(\Omega) \qquad \cos(\Omega) = \frac{1}{2}\left(e^{i\Omega} + e^{-i\Omega}\right)$$

$$e^{-i\Omega} = \cos(\Omega) - i\sin(\Omega) \qquad \sin(\Omega) = \frac{1}{2}\left(e^{i\Omega} - e^{-i\Omega}\right)$$

Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden

1. Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden

Bewegungs-DGLen des Feder-Masse Systems :



$$m\ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 = 0$$

in Matrizenschreibweise:

$$\begin{Bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \left(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t\right) + \vec{e}_2 \left(A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t\right)$$

Hierin sind:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Eigenformen (normiert))}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3c}{m}} \qquad \text{(Eigenfrequenzen)}$$

$$A_1, B_1, A_2, B_2 \qquad \text{(Konstanten, aus ABen zu bestimmen)}$$