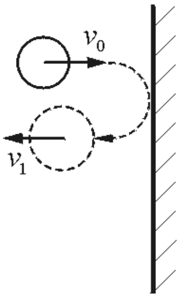
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 10.

Teilelastischer Stoß, Stoßzahl. Körper mit veränderlicher Masse

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 2.6, 2.7.**

I. Elastischer und nicht elastischer Stoß



$|v_0| = |v_1|$ -absolut elastischer Stoß

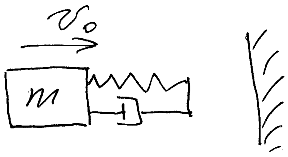
$|v_1| = 0$ -absolut plastischer Stoß

$|v_1| = e|v_0|$ - teilelastischer Stoß

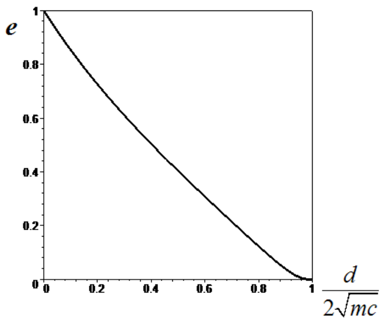
e = Stoßzahl

Beim elastischen Stoß bleibt Energie erhalten.

Ein Modell für einen teilelastischen Stoß.



Ein Körper mit Masse m ist mit einer Feder (Steifigkeit c) und einem Dämpfer (Dämpfungskonstante d) versehen. Er stößt gegen eine starre Wand mit der Geschwindigkeit v_0. Mit den Methoden, die später bei der Schwingungstheorie erläutert werden (Vorlesung 21) kann man zeigen, dass für $d > 2\sqrt{mc}$ der Stoß absolut plastisch ist: Der Körper springt nicht zurück.
Für $d < 2\sqrt{mc}$ ist der Stoß teilelastisch und die Stoßzahl kann durch die Gleichung



$$e = \exp\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{4mc/d^2 - 1}}\right)$$

angenähert werden (Bild oben).

Beispiel 1: Man lässt eine elastische Kugel aus einer Höhe h_1 auf eine starre ebene Fläche fallen. Nach dem Stoß erreicht sie eine Höhe h_1. Wie groß ist die Stoßzahl?

<u>Lösung:</u> Die Geschwindigkeit vor dem Stoß ist gleich $v_1 = \sqrt{2gh_1}$.

Die nach dem Stoß $v_2 = \sqrt{2gh_2}$.

Die Stoßzahl ist gleich $e = v_2 / v_1 = \sqrt{h_2 / h_1}$.

Bei $h_2 / h_1 = 0.78$ ist $\underline{e = 0.88}$. Nach vier Stößen wird die Höhe $0.78^4 h_1 = 0.37 h_1$ sein.

II. Teilelastischer Stoß zweier Körper

Beim teilelastischen Stoß verringert sich der Betrag der relativen Geschwindigkeit:

$$e(v_1 - v_2) = -(v_1' - v_2').$$

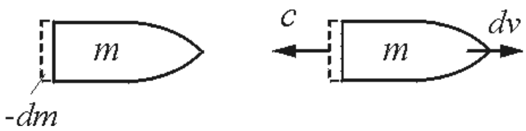
Aus dieser Gleichung zusammen mit dem Impulserhaltungssatz $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ kann man v_1' und v_2' bestimmen:

$$v_1' = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1 v_1 (1+e) + v_2 (m_2 - e m_1)\right]$$

$$v_2' = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_2 v_2 (1+e) + v_1 (m_1 - e m_2)\right]$$

III. Körper mit veränderlicher Masse

a) <u>Rakete im Weltraum</u>



Eine Rakete stößt Verbrennungsprodukte mit einer Abstoßgeschwindigkeit c aus. Die verbliebene Masse der Rakete sei $m(t)$. Das Massendifferential dm ist eine *negative* Größe. Deshalb ist die abgestoßene Masse gleich $-dm$. Wir gehen in ein Inertialsystem über, das sich zum Zeitpunkt t mit der Rakete bewegt.

Impulserhaltung beim Abstoß einer kleinen Gasmasse $-dm$:

Impuls "vor" $= 0$

Impuls "nach" $= m dv - c(-dm) = 0$

$$dv = -c\, dm / m; \qquad (1)$$

Diese Änderung der Geschwindigkeit gilt natürlich in jedem Inertialsystem, auch im "ruhenden". Integration von (1) führt zur

Ziolkowski-Gleichung:

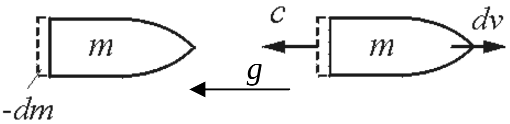
$$v = -c \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -c \ln \frac{m}{m_0} = c \ln \frac{m_0}{m}$$

Beispiel 2. Wie schwer muss eine Rakete mindestens sein, damit sie eine Kapsel mit der Masse m bis zur Geschwindigkeit v beschleunigen kann? Antwort: $\frac{m_0}{m} = e^{v/c}$;

Beispiel: v=Fluchtgeschwindigkeit (11,2 km/s) c=2, 3 oder 4 km/s.

$e^{11,2/2} = 270$; $e^{11,2/3} = 40$; $e^{11,2/4} = 16$.

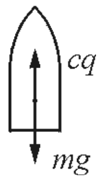
b) <u>Rakete im Schwerefeld</u>



Das System ist *nicht* abgeschlossen, der Impuls bleibt nicht erhalten. Der Impulssatz gilt aber für alle Systeme, auch nicht abgeschlossene:
Impuls "vor" $=0$
Impuls "nach" $= mdv - c(-dm)$.
Die Änderung des Impulses ist gleich Kraft mal Zeit:

$$dp = mdv - c(-dm) = Fdt = -(m+dm)gdt \approx -mg \cdot dt$$

Daraus folgt $m\dfrac{dv}{dt} = -mg + c\dfrac{(-dm)}{dt}$. (2)



$\dfrac{(-dm)}{dt} = q$ ist die pro Zeiteinheit ausgestoßene Masse. Die Gleichung (2) nimmt die Form an:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + cq = F_s + S$$

F_s ist die Schwerekraft, S ist der *Schub*.
Angenommen, die Massenänderung q ist konstant. Dann gilt: $m = m_0 - qt$

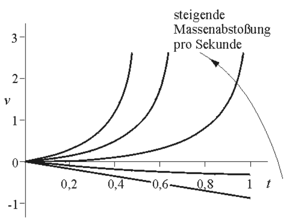
$$\frac{dv}{dt} = \frac{cq}{m} - g = -g + \frac{cq}{m_0 - qt}$$

$$v = -gt + \int_0^t \frac{cq}{m_0 - qt} = -gt - c\log\left(1 - \frac{q}{m_0}t\right)$$

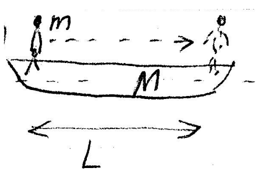
Grenzfall: kleine t

$$v = -gt + c\frac{q}{m_0}t = \frac{cq - m_0 g}{m_0}t$$

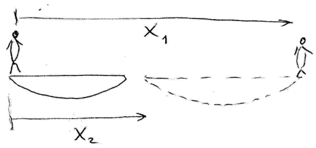
Ein Start ist nur dann möglich, wenn $cq > m_0 g$



Beispiel 3. Ein Mensch (Masse *m*) geht vom Bug eines (am Anfang ruhenden) Bootes (Länge *L*) zum Heck über. Wie verschiebt sich das Boot unter den folgenden Annahmen: (a) Es gibt keine Reibung zwischen dem Boot und dem Wasser, (b) Es gibt eine Widerstandskraft proportional zur Geschwindigkeit?



<u>Lösung (a):</u> *keine Reibung*.
Die Länge des Bootes ist $L = x_1 - x_2$.
Verschiebung des Schwerpunktes:



$$\Delta x_S = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M} = 0$$

(Null nach dem Schwerpunktsatz).
Aus dem Gleichungssystem folgt

$$\boxed{x_2 = -\frac{m}{M+m}L}.$$

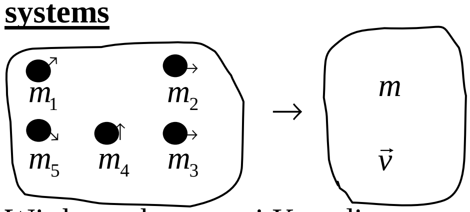
<u>Lösung (b):</u> *Mit Widerstandskraft*

Das 2. N.G. für den Menschen und das Boot:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = N \\ M\ddot{x}_2 = -N - \alpha\dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = -\alpha\dot{x}_2$$

oder $m\dot{x}_1 + M\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + C$.
Aus den Anfangsbedingungen folgt $C = 0$.
Somit $\alpha x_2 = -m\dot{x}_1 - M\dot{x}_2$.
Am Ende des Prozesses sind $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$.
Somit ist $x_2 = 0$: Das Boot ist am Ende in derselben Lage wie am Anfang!

<u>IV. Kinetische Energie eines Mehrkörpersystems</u>



Wir betrachten zwei Koordinatensysteme:
Ein Laborsystem (x,y) und ein System, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Schwerpunktes bewegt (Schwerpunktsystem). Gegeben sind: Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ <u>im Schwerpunktsystem</u> und Geschwindigkeit $\vec{v}$ <u>des Schwerpunktes.</u> Zu bestimmen ist die gesamte kinetische Energie. <u>Lösung:</u> Die Geschwindigkeiten im Laborsystem sind $\vec{v}_i{}' = \vec{v}_i + \vec{v}$.
Die gesamte Kinetische Energie ist gleich

$$T = \sum \frac{m_i v_i'^2}{2} = \sum \frac{m_i(\vec{v}_i + \vec{v})^2}{2} =$$

$$= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum \frac{m_i 2\vec{v}_i \vec{v}}{2} + \sum \frac{m_i v^2}{2} =$$

$$= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \underbrace{\vec{v}\sum m_i \vec{v}_i}_{=0} + \frac{v^2}{2}\underbrace{\sum m_i}_{m} =$$

$$= \frac{mv^2}{2} + \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

„Kinetische Energie des Schwerpunktes“

Kinetische Energie im Schwerpunktsystem = „innere Energie“