Klausur - Kinematik und Dynamik - SoSe 2013

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser umrahmte Bereich ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

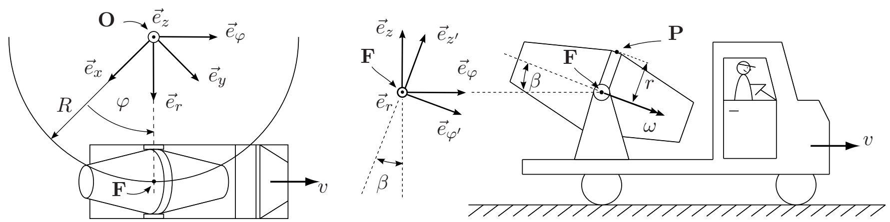
Nachname	______________	Vorname	______________
Studiengang	______________	Matrikelnummer	______________
Art der Klausur:		◯ Prüfungsklausur	◯ Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ 1 - 6	Kurzfragenteil	Sichtung
Punkte							/ 80	/ 20	

Die Klausur umfasst acht Rechenaufgaben und einen Kurzfragenteil. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 40 von 100 Punkten erreicht werden, jedoch muss dabei der Kurzfragenteil mit mind. 10 von 20 Punkten bestanden werden.
Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils** direkt auf dem Klausurblatt ein (nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!).
Es werden alle **Rechenaufgaben** gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden nicht beachtet. Es ist immer anzugeben, auf welchen Aufgabenteil sich eine Lösung bezieht. Lösungen sind zweimal zu unterstreichen. Alle Lösungen sind explizit in den gegeben Größen auszudrücken. Wenn Abkürzungen verwendet werden, sind diese eindeutig bei der Lösung anzugeben. Kontrollieren Sie die Dimension Ihrer Ergebnisse.

$\boxed{1}$ Punktkinematik — 2+3+4=9 Punkte

Ein Zementtransporter, dessen Mischtrommel sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω bei einer konstanten Schrägstellung β dreht, durchfährt in horizontaler Ebene eine Linkskurve vom Radius R mit der konstanten Geschwindigkeit v. Der Punkt **F** liegt im Mittelpunkt der Trommel. Der Punkt **P** befindet sich außen an der rotierenden Trommel. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $\varphi = 0$ und **P** befindet sich am höchsten Punkt.



(a) Geben Sie den Verbindungsvektor $\vec{x}_{FP}$ von Punkt **F** nach Punkt **P** in der Basis ($\vec{e}_{\varphi'}$, $\vec{e}_{z'}$, $\vec{e}_r$) an. Beachten Sie dabei, dass sich die Trommel mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

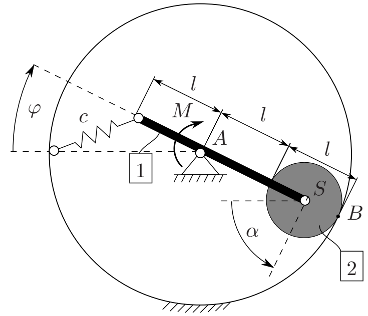
(b) Geben Sie den Verbindungsvektor $\vec{x}_{OP}$ von Punkt **O** nach Punkt **P** in der Basis ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$) an.

(c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes **P** in der Basis ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$).

Geg.: r, R, v, β, ω

$\boxed{2}$ Energie- und Arbeitssatz — 4+9+4=17 Punkte

Eine Stange (Körper 1, m_1, Θ_1^A) ist im Mittelpunkt eines Hohlrades gelagert. An einem Ende ist eine Rolle (Körper 2, m_2, Θ_2^S) befestigt, die auf dem Hohlrad abrollt (kein Gleiten). Am anderen Ende der Stange ist eine Feder der Steifigkeit c befestigt. Weiterhin wirkt auf die Stange ein Moment M. In der Lage $\varphi = 0$ ist $\alpha = 0$ und die Feder entspannt. Vernachlässigen sie den Einfluss der Schwerkraft.



(a) Bestimmen Sie einen Zusammenhang zwischen α und φ. Zeigen Sie, dass für die Längenänderung $x(\varphi)$ der Feder als Funktion des Winkels φ gilt:

$$\frac{x}{\ell} = \sqrt{5 - 4\cos\varphi} - 1 \qquad (1)$$

Hinweis: Verwenden Sie (1) für die Aufgaben (b) bis (c).

(b) Für den Ausgangszustand sei $\varphi_1 = \pi$ und $\dot{\varphi}_1 = 0$. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass das Lager in A Reibungsbehaftet ist ($|M| = +M_R$) die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2$, wenn die Stange um $\varphi_2 = \pi/2$ ausgelenkt ist.

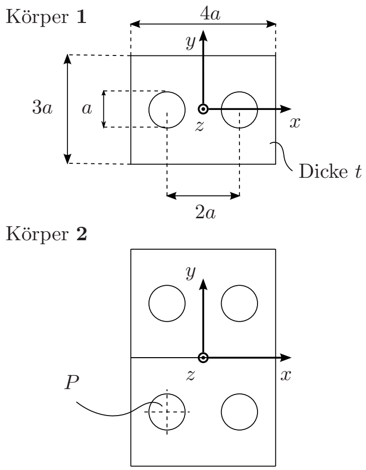
(c) Für den Ausgangszustand sei $\varphi_1 = 0$ und $\dot{\varphi}_1 = 0$. Das nun reibungsfreie System soll durch ein Antriebsmoment $M = M_A > 0$ angetrieben werden. Wie groß muss M_A gewählt werden, damit das System mindestens die Lage $\varphi_2 = \pi$ erreicht?

Geg.: m_1, Θ_1^A, m_2, Θ_2^S, l, c, $M_R > 0$, $g = 0$

3 Massenträgheitsmoment 6+4+2=12 Punkte

Gegeben sind zwei Körper (**1**, **2**) gleicher Dicke t, die sehr klein ist ($t << a$). Körper **1** ist symmetrisch bezüglich der x- und y-Achse, und weist zwei Bohrungen auf. Der Körper **2** ist vollständig aus zwei identischen Körpern **1** zusammengesetzt. Die Trägheitsmomente der elementaren Körper sollen angegeben, jedoch nicht durch Integration berechnet werden.

Fassen Sie ihre Ergebnisse immer zu **zwei Summanden** zusammen.



(a) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment von Körper **1** bezüglich eigenem Schwerpunkt und der z-Achse: $\Theta^S_{zz,1}$.

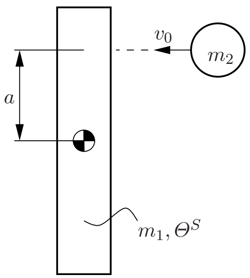
(b) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment von Körper **2** bezüglich eigenem Schwerpunkt und der z-Achse: $\Theta^S_{zz,2}$.

(c) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment von Körper **2** bezüglich dem Punkt P und der z-Achse: $\Theta^P_{zz,2}$.

Geg.: a, t, ρ

4 Impulserhaltung (bekannte Aufgabe) 6+4=10 Punkte

Eine Kugel (m_2) stößt mit der Geschwindigkeit v_0 gegen einen frei beweglichen, ruhenden Klotz ($m_1, \Theta^S = \frac{1}{2}m_1a^2$). Nach dem Stoß ist die Geschwindigkeit der Kugel null.



(a) Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit ω des Klotzes und die Geschwindigkeit seines Schwerpunkts v nach dem Stoß? (Der Stoß kann nicht als ideal elastisch angenommen werden.)

(b) Berechnen Sie für den Fall eines ideal elastischen Stoßes das Verhältnis der Massen m_1/m_2.

Geg.: m_1, m_2, a, v_0, $\Theta^S = \frac{1}{2}m_1a^2$

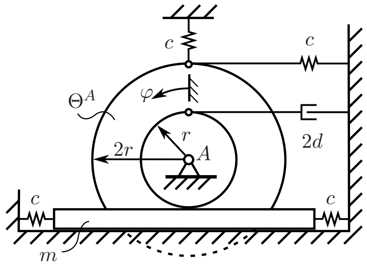
5 Freie Schwingungen 12+1+4=17 Punkte

Das gezeigte System besteht aus einer drehbar gelagerten Kreisscheibe und einer reibungsfrei geführten Stange. Die Kreisscheibe (Massenträgheitsmoment Θ^A) rollt ohne Schlupf auf der Stange (Masse m) ab. Beide Körper sind über lineare Federn und einen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer an die Umgebung gekoppelt. In der eingezeichneten Lage sind die Federn entspannt. Die Ausrichtung der Federn und des Dämpfers bleiben stets gleich. Zur Untersuchung des Schwingverhaltens sind die folgenden Teilaufgaben zu bearbeiten:

(a) Geben Sie für kleine Auslenkungen $\varphi << 1$ die lineare Differentialgleichung des Systems in der Koordinate φ an. Benutzen Sie Abkürzungen für die Abklingkonstante δ und die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0.

(b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems.

(c) Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus (a) an. Bestimmen Sie hiermit zusätzlich die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0$.



Geg.: m, Θ^A, r, c, d, φ_0

6 Erzwungene Schwingungen 2+5+8=15 Punkte

Ein System soll bezüglich seines Verhaltens bei harmonischer Anregung untersucht werden. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{\varphi} + c_1 \sin\varphi\cos\varphi + r\dot{\varphi}\cos^2\varphi + c_2\sin\varphi - \frac{mg}{a}\cos\varphi = \frac{M_0}{a^2}\cos(\Omega t).$$

(a) Linearisieren Sie die Gleichung für kleine Winkel $\varphi << 1$.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) und (c) die linearisierte Form der Differentialgleichung.

(b) Geben Sie die statische Ruhelage φ_s und die Bewegungsgleichung für die Auslenkung ($\alpha = \varphi - \varphi_s$) um diese an. Geben Sie weiterhin die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften und die Eigenkreisfrequenz ω_d des gedämpften Systems an. Wie lautet die Bedingung an die Dämpferkonstante r, damit das System frei schwingen kann?

(c) Berechnen Sie die Lösung $\varphi(t)$ der Differentialgleichung für den eingeschwungenen Zustand. Geben Sie die einzelnen Rechenschritte explizit an. Geben Sie die Phase und Amplitude der Lösung an.

Geg.: m, c_1, c_2, r, a, g, Ω, M_0

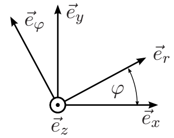
Theorieaufgaben **20 Punkte**

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Massenträgheitsmoment	$\Theta^{(A)}$	
Federsteifigkeit der Dehnfeder	c	
kinetische Energie	K	
Erregerkreisfrequenz	Ω	

1 Punkt

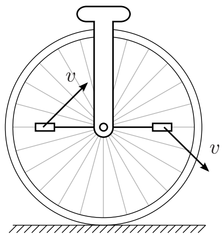
2. Gegeben sei der Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}_x$ des Punktes P. Geben Sie $\vec{r}$ im um den Winkel φ gedrehtem Koordinatensystem $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ an.



$\vec{r} =$

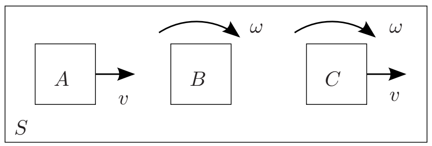
Geg.: $\vec{r} = x\vec{e}_x$, x, φ **1 Punkt**

3. Ein Einrad, bestehend aus Rad und Rahmen mit Sattel, rolle mit **Schlupf**. Zeichnen Sie den Momentanpol des Rades ein.



Geg.: v **1 Punkt**

4. System S sei ein Inertialsystem. Welches der Systeme (A, B, C) ist dann ebenfalls ein Inertialsystem?



Geg.: $v = const \neq 0$, $\omega = const \neq 0$ **1 Punkt**

5. Ein Rad rolle mit **Schlupf**. Benennen Sie für diesen Fall die Größe, die sich aus dem Quotienten der Reibkraft zu der Normalkraft ergibt.

„$\frac{F_R}{F_N}$“ heißt ...

1 Punkt

6. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Stoßzahl	e	
Dämpfungsmaß	D	
Winkelbeschleunigung	$\ddot{\varphi}$	
Impuls	$\vec{p}$	

1 Punkt

7. Ein Fallschirmspringer unterliege der Schwerkraft $F_g = mg$ und einer zur Geschwindigkeit zum Quadrat proportionalen Widerstandkraft $F_w = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$. Wie groß ist seine maximale Fallgeschwindigkeit?

$v_{max} =$

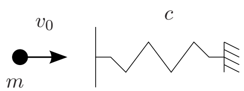
Geg.: $F_g = mg$, $F_w = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$, m, g, c_w, ρ, A **1 Punkt**

8. Ein ruhender Körper zerfällt in drei gleich schwere Teilkörper. Die Geschwindigkeiten zweier Körper ($\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$) sind bekannt. Geben Sie die Geschwindigkeit des dritten Körpers an.

$\vec{v}_3 =$

Geg.: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **1 Punkt**

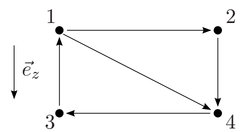
9. Eine Körper mit Masse m prallt mit der Geschwindigkeit v_0 gegen eine entspannte Feder mit Steifigkeit c. Geben Sie die maximale Deformation x der Feder an.



$x =$

Geg.: m, c, v_0 **1 Punkt**

10. Ein Körper bewegt sich auf verschiedenen Wegen durch ein konstantes Kraftfeld, welches in $\vec{e}_z$ Richtung wirkt. Setzen Sie die Arbeiten, die das Kraftfeld an dem Körper verrichtet, in Relation zueinander ($<, >, =$).



W_{12} ☐ W_{43} W_{14} ☐ W_{24}

1 Punkt

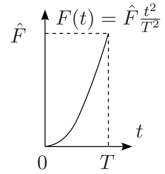
11. Eine Kugel stoße senkrecht gegen eine feste Wand. Der Stoß sei teilelastisch mit Stoßzahl $e = 0,5$. Um welchen Faktor ändert sich ihre kinetische Energie bei diesem Stoß (K_0 kinetische Energie vor dem Stoß, K_1 kinetische Energie nach dem Stoß)?

$$\frac{K_1}{K_0} =$$

Geg.: $e = 0,5$ **1 Punkt**

---

12. Eine Masse m erfährt über einen Zeitraum $0 < t < T$ eine Kraft $F(t)$, welche in Bewegungsrichtung wirkt. Um welchen Betrag ändert sich dann ihre Geschwindigkeit?

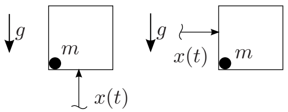


$$\Delta v =$$

Geg.: m, $F(t) = \hat{F}t^2/T^2$, $\hat{F}$, T **1 Punkt**

---

13. Ein Fahrstuhl bewege sich im linken Bild vertikal und im rechten Bild horizontal. Geben Sie die Relation ($<, >, =$) zwischen den Beträgen der vom Fahrstuhl auf die Masse m ausgeübten Kraft an.

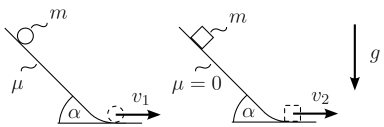


$|F_{Links}|$ ☐ $|F_{Rechts}|$

Geg.: $x(t) = 2gt^2$, g, m **1 Punkt**

---

14. Eine Kugel und ein Klotz bewegen sich unter Einfluss der Schwerkraft eine schiefe Ebene hinab. Die Kugel rollt **ohne Schlupf**. Der Klotz rutscht reibungsfrei. Geben Sie die Relation ($<, >, =$) zwischen den Endgeschwindigkeiten an.

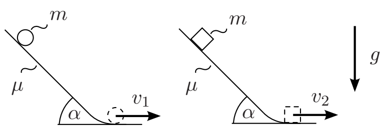


v_1 ☐ v_2

Geg.: α, μ, m, g **1 Punkt**

---

15. Eine Kugel und ein Klotz bewegen sich unter Einfluss der Schwerkraft eine schiefe Ebene hinab. Die Kugel rollt **mit Schlupf**. Der Klotz rutscht. Geben Sie die Relation ($<, >, =$) zwischen den Endgeschwindigkeiten an.

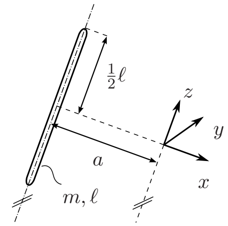


v_1 ☐ v_2

Geg.: α, μ, m, g **1 Punkt**

---

16. Betrachten Sie den langen, dünnen Stab mit der Länge ℓ und der Masse m. Geben Sie das Massenträgheitsmoment Θ_{yy} bezüglich der eingezeichneten Achse y an.

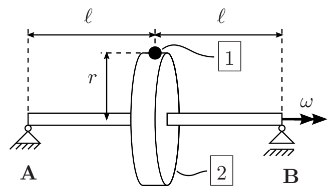


$$\Theta_{yy} =$$

Geg.: a, ℓ, m **1 Punkt**

---

17. Betrachten Sie eine auf der Symmetrieachse gelagerte Kreisscheibe (2), an deren Umfang eine Punktmasse (1) exzentrisch angebracht wurde. Geben Sie den Betrag der Lagerreaktion in **A** an, wenn die Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.



$$|F_A| =$$

Geg.: m_1, m_2, Θ_2^S, r, ω, ℓ **1 Punkt**

---

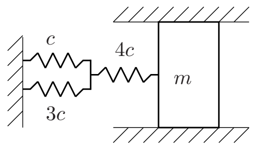
18. Es zeigt sich, dass sich die mittlere Energie eines gedämpft schwingenden Systems nach dem Gesetz $\langle \dot{E} \rangle = -2\delta \langle E \rangle$ verhält. Die mittlere Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ sei mit $\langle E_0 \rangle$ gegeben. Geben Sie den zeitlichen Verlauf der mittleren Energie an!

$$\langle E \rangle =$$

Geg.: $\langle \dot{E} \rangle = -2\delta \langle E \rangle$, δ, $\langle E_0 \rangle$ **1 Punkt**

---

19. Geben Sie die Eigenkreisfrequenz des Systems an.

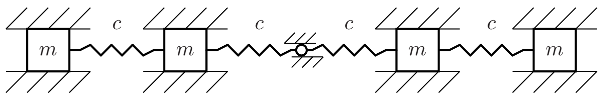


$$\omega_0 =$$

Geg.: c, m **1 Punkt**

---

20. Das dargestellte System besteht aus vier Massen und Federelementen. In der Mitte sind zwei Federn durch einen masselosen Knoten verbunden. Geben Sie an, wie viele Eigenfrequenzen und Eigenformen das System besitzt.



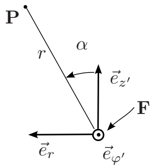
☐ Eigenfrequenzen

☐ Eigenformen

Geg.: c, m **1 Punkt**

Aufgabe 1

(a)



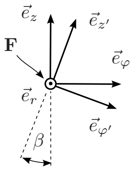
Schaut man in $\vec{e}_{\varphi'}$ Richtung auf die Trommel, erkennt man die Drehung um den Hilfswinkel α. Dieser Winkel lässt sich bestimmen:

$$\dot{\alpha} = \omega, \alpha(t=0) = 0 \Rightarrow \alpha = \omega t \tag{1}$$

Es folgt für den Verbindungsvektor **F** nach **P**:

$$\vec{x}_{FP} = r\cos(\omega t)\vec{e}_{z'} + r\sin(\omega t)\vec{e}_r \tag{2}$$

(b)



Betrachtet man in $\vec{e}_r$ Richtung das Koordinatensystem in Punkt **F**, erkennt man die Transformation für die Basis $\vec{e}_{z'}$:

$$\vec{e}_{z'} = \cos(\beta)\vec{e}_z + \sin(\beta)\vec{e}_\varphi \tag{3}$$

Der Verbindungsvektor **O** nach **P** folgt als Summe zu:

$$\vec{x}_{OP} = \vec{x}_{OF} + \vec{x}_{FP} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_{OP} &= R\vec{e}_r + r\cos(\omega t)\vec{e}_{z'} + r\sin(\omega t)\vec{e}_r && (5)\\ &= [R + r\sin(\omega t)]\,\vec{e}_r + r\cos(\omega t)\vec{e}_{z'} && (6)\end{aligned}$$

Einsetzen der Basistransformation für $\vec{e}_{z'}$:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{OP} &= [R + r\sin(\omega t)]\,\vec{e}_r && (7)\\ &+ r\cos(\omega t)\sin(\beta)\vec{e}_\varphi && (8)\\ &+ r\cos(\omega t)\cos(\beta)\vec{e}_z && (9)\end{aligned}$$

(c)

Winkelgeschwindigkeit der Rotation um Punkt **O**

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{R} \tag{10}$$

Ableitung der Basisvektoren

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r \tag{11}$$

Einsetzen von $\dot{\varphi}$

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{v}{R}\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\frac{v}{R}\vec{e}_r \tag{12}$$

Ableitung des Verbindungsvektors

$$\begin{aligned} \vec{v}_{OP} &= r\omega\cos(\omega t)\vec{e}_r + [R + r\sin(\omega t)]\,\frac{v}{R}\vec{e}_\varphi && (13)\\ &- r\omega\sin(\omega t)\sin(\beta)\vec{e}_\varphi - r\cos(\omega t)\sin(\beta)\frac{v}{R}\vec{e}_r && (14)\\ &- r\omega\sin(\omega t)\cos(\beta)\vec{e}_z && (15)\end{aligned}$$

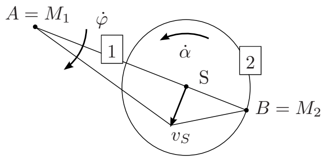
Sortiert nach Basisvektoren

$$\begin{aligned} \vec{v}_{OP} &= r\cos(\omega t)\left[\omega - \sin(\beta)\frac{v}{R}\right]\vec{e}_r && (16)\\ &+ \left[v + v\frac{r}{R}\sin(\omega t) - r\omega\sin(\omega t)\sin(\beta)\right]\vec{e}_\varphi && (17)\\ &- r\omega\sin(\omega t)\cos(\beta)\vec{e}_z && (18)\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a)

Zusammenhang α und φ



Punkt A ist als Festlager Momentanpol M_1 von Körper 1. Punkt B ist infolge der Rollbedingung Momentanpol M_2 von Körper 2. Die Geschwindigkeit in S ist von beiden Körpern gleich, und infolge der reinen Drehbewegung zu berechnen:

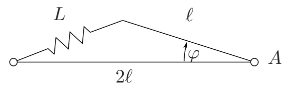
$$v_S = \frac{3}{2}\ell\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\ell\dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = 3\dot{\varphi} \tag{19}$$

Einmal integrieren und verwenden der Bedingung $\varphi = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ liefert:

$$\alpha = 3\varphi \tag{20}$$

Es folgen zwei denkbare Rechenwege (Cosinus-Satz oder trigonometrischen Beziehungen und Pythagoras).

Längenänderung der Feder x (Cosinus-Satz)



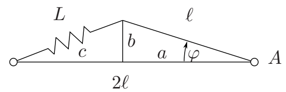
An dem gezeigten Dreieck wendet man den Cosinus-Satz an:

$$L^2 = \ell^2 + (2\ell)^2 - 2(2\ell)\ell\cos(\varphi) \tag{21}$$

$$L = \sqrt{5 - 4\cos(\varphi)}\,\ell \tag{22}$$

$$x = L - L_0 = (\sqrt{5 - 4\cos(\varphi)} - 1)\ell \tag{23}$$

Längenänderung der Feder x (Pythagoras)



Für L benötigt man die Längen b und c:

$$\begin{aligned} a &= \ell\cos(\varphi) && (24)\\ b &= \ell\sin(\varphi) && (25)\\ c &= 2\ell - a = 2\ell - \ell\cos(\varphi) && (26)\end{aligned}$$

Pythagoras im linken Dreieck liefert:

$$\begin{aligned} L^2 &= b^2 + c^2 && (27)\\ &= \ell^2\sin^2(\varphi) + (2\ell - \ell\cos(\varphi))^2 && (28)\\ &= 5\ell^2 - 4\ell^2\cos(\varphi) && (29)\\ \Rightarrow L &= \sqrt{5 - 4\cos(\varphi)}\,\ell && (30)\end{aligned}$$

$$x = L - L_0 = (\sqrt{5 - 4\cos(\varphi)} - 1)\ell \tag{31}$$

(b)

Der Arbeitssatz lautet:

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= K_2 - K_1 + U_2 - U_1 && (32)\\ &= K_{12} + U_{12} = W_{12} && (33)\end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$K_{12} = \frac{1}{2}\Theta_1^A\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_2^S\dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{\ell^2}{4}\dot{\alpha}_2^2 \tag{34}$$

Mit der kinematischen Beziehung $\dot{\alpha} = 3\dot{\varphi}$:

$$K_{12} = \frac{1}{2}(\Theta_1^A + 9\Theta_2^S + \frac{9}{4}m_2\ell^2)\dot{\varphi}_2^2 \tag{35}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{1}{2}cx_2^2 - \frac{1}{2}cx_1^2 && (36)\\ &= \frac{1}{2}c\ell^2(\sqrt{5} - 1)^2 - \frac{1}{2}c\ell^2 4 && (37)\end{aligned}$$

Arbeit:

$$W_{12} = -M_R|\Delta\varphi| = -M_R\frac{\pi}{2} \tag{38}$$

Einsetzen:

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{c\ell^2[4 - (\sqrt{5} - 1)^2] - \pi M_R}{\Theta_1^A + 9\Theta_2^S + \frac{9}{4}m_2\ell^2}} \tag{39}$$

(c)

Der Arbeitssatz lautet:

$$E_2 - E_1 = K_{12} + U_{12} = W_{12} \tag{40}$$

Kinetische Energie:

$$K_{12} = 0 \tag{41}$$

Potentielle Energie:

$$U_{12} = \frac{1}{2}c4\ell^2 \tag{42}$$

Arbeit:

$$W_{12} = M_A|\Delta\varphi| = M_A\pi \tag{43}$$

Einsetzen:

$$M_A \geq \frac{2c\ell^2}{\pi} \tag{44}$$

Aufgabe 3

(a)

Massenträgheitsmoment eines Quaders:

$$\Theta^S_{zz,Q} = \frac{1}{12} m_Q (x^2 + y^2) \tag{45}$$

Mit den gegebenen Werten:

$$\Theta^S_{zz,Q} = \frac{1}{12} \underbrace{(3a)(4a)\rho t}_{m_Q}[(3a)^2 + (4a)^2] = 25\rho t a^4 \tag{46}$$

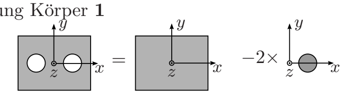
Massenträgheitsmoment einer Kreisscheibe:

$$\Theta^S_{zz,K} = \frac{1}{2} m_K r^2 \tag{47}$$

Mit den gegebenen Werten:

$$\Theta^S_{zz,K} = \frac{1}{2} \underbrace{\pi(\frac{a}{2})^2 \rho t}_{m_K} (\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi}{32}\rho t a^4 \tag{48}$$

Zerlegung Körper **1**



Sein Massenträgheitsmoment folgt dann zu:

$$\Theta^S_{zz,1} = \Theta^S_{zz,Q} - 2(\Theta^S_{zz,K} + m_K a^2) \tag{49}$$

Berechnung liefert:

$$\Theta^S_{zz,1} = 25\rho t a^4 - 2(\frac{\pi}{32}\rho t a^4 + \frac{\pi}{4}\rho t a^4) \tag{50}$$

$$= \rho t a^4 (25 - \pi \frac{9}{16}) \tag{51}$$

(b)

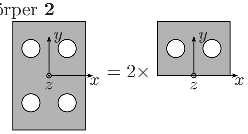
Es folgen zwei denkbare Rechenwege.

Berechnung **mit** Ergebniss aus (a)

Masse Körper **1**:

$$m_1 = m_Q - 2m_K = \rho t a^2 (12 - \frac{\pi}{2}) \tag{52}$$

Zerlegung Körper **2**



Sein Massenträgheitsmoment folgt dann zu:

$$\Theta^S_{zz,2} = 2(\Theta^S_{zz,1} + m_1 \frac{9}{4} a^2 \tag{53}$$

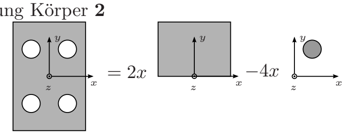
Berechnung liefert:

$$\Theta^S_{zz,2} = 2\rho t a^4 (25 - \pi\frac{9}{16} + 27 - \pi\frac{9}{8}) \tag{54}$$

$$= \rho t a^4 (104 - \pi\frac{27}{8}) \tag{55}$$

Berechnung **ohne** Ergebniss aus (a)

Zerlegung Körper **2**



Sein Massenträgheitsmoment folgt dann zu:

$$\Theta^S_{zz,2} = 2(\Theta^S_{zz,Q} + m_Q \frac{9}{4} a^2) - 4\left(\Theta^S_{zz,K} + m_K (a^2 + \frac{9}{4} a^2)\right) \tag{56}$$

Berechnung liefert:

$$\Theta^S_{zz,2} = 2\rho t a^4 (25 - \pi\frac{9}{16} + 27 - \pi\frac{9}{8}) \tag{57}$$

$$= \rho t a^4 (104 - \pi\frac{27}{8}) \tag{58}$$

(c)

Mittels Steiner-Anteil wird das Massenträgheitsmoment in einem anderen Punkt berechnet:

$$\Theta^P_{zz,2} = \Theta^S_{zz,2} + 2m_1 (a^2 + \frac{9}{4} a^2) \tag{59}$$

Berechnung liefert:

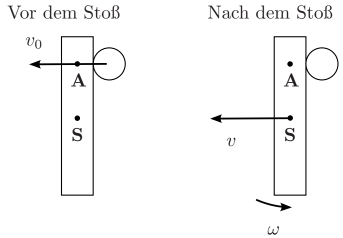
$$\Theta^P_{zz,2} = \Theta^S_{zz,2} + m_1 \frac{13}{2} a^2 \tag{60}$$

$$= \rho t a^4 (104 - \pi\frac{27}{8} + 78 - \pi\frac{13}{4}) \tag{61}$$

$$= \rho t a^4 (182 - \pi\frac{53}{8}) \tag{62}$$

Aufgabe 4

(a)



Impulserhaltung Gesamtsystem:

$$p = p' \tag{63}$$

Mit den gegebenen Werten:

$$m_2 v_0 = m_1 v \tag{64}$$

Ergebniss:

$$v = v_0 \frac{m_2}{m_1} \tag{65}$$

Der Drehimpuls bleibt für einen beliebigen Punkt im Gesamtsystem erhalten (für Punkt A auch in den Teilsystemen). Die Rechnung ist exemplarisch für die Punkte **S** und **A** gezeigt.

Drehimpulserhaltung bezüglich **S** im Gesamtsystem

$$L^S = L^{S'} \tag{66}$$

Mit den gegebenen Werten:

$$a m_2 v_0 = \Theta^S \omega \tag{67}$$

Ergebniss:

$$\omega = \frac{a m_2}{\Theta^S} v_0 = \frac{2m_2}{a m_1} v_0 \tag{68}$$

Drehimpulserhaltung bezüglich **A** im Gesamtsystem

$$L^A = L^{A'} \tag{69}$$

Mit den gegebenen Werten:

$$0 = \Theta^S \omega - a m_1 v \tag{70}$$

Ergebniss:

$$\omega = \frac{a m_1}{\Theta^S} v \tag{71}$$

$$= \frac{a m_2}{\Theta^S} v_0 = \frac{2m_2}{a m_1} v_0 \tag{72}$$

(b)

Kinetische Energie vor dem Stoß:

$$K = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 \tag{73}$$

Kinetische Energie nach dem Stoß:

$$K' = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2}\Theta^S \omega^2 \tag{74}$$

Einsetzen der Ergebnisse aus (a) und $\Theta^S = \frac{1}{2} m_1 a^2$:

$$K' = \frac{3}{2}\frac{m_2^2}{m_1} v_0^2 \tag{75}$$

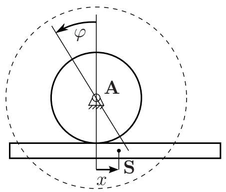
Gleichsetzen der kinetische Energie (Energieerhaltung):

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{3}{2}\frac{m_2^2}{m_1} v_0^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3 \tag{76}$$

Aufgabe 5

(a)

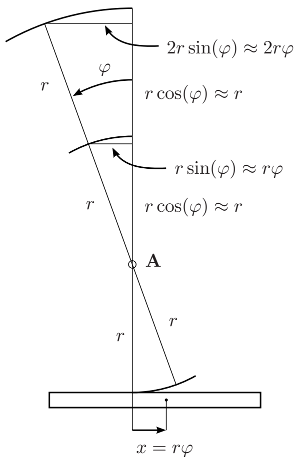
Kinematik



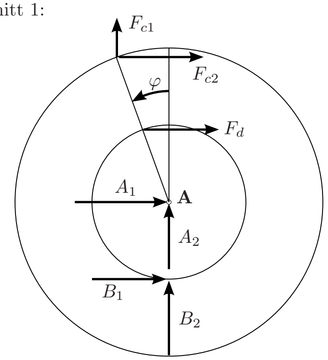
Die Rollbedingung liefert einen Zusammenhang zwischen Verdrehung der Scheibe und der Verschiebung des Balkens:

$$x = r\varphi \tag{77}$$

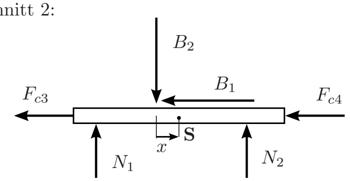
Übersicht der linearisierten kinematischen Beziehungen:



Dynamik
Freischnitt 1:



Freischnitt 2:



Linearisierte Feder- und Dämpferkräfte:

$$F_{c1} = c(2r - 2r\cos(\varphi)) \approx 0 \tag{78}$$
$$F_{c2} = 2cr\sin(\varphi)) \approx 2cr\varphi \tag{79}$$
$$F_{c3} = F_{c4} = cr\varphi \tag{80}$$
$$F_d = 2dr\dot{\varphi}\cos(\varphi) \approx 2dr\dot{\varphi} \tag{81}$$

Impulssatz für den Balken in Bewegungsrichtung:

$$m\ddot{x} = -B_1 - F_{c3} - F_{c4} \tag{82}$$
$$\Rightarrow B_1 = -mr\ddot{\varphi} - 2cr\varphi \tag{83}$$

Drallsatz um **A** für die Walze:

$$\Theta^A\ddot{\varphi} = -F_{c2}2r - F_d r + B_1 r \tag{84}$$

Eliminieren von B_1 und Kräfte einsetzen:

$$(\Theta^A + mr^2)\ddot{\varphi} = -4cr^2\varphi - 2dr^2\dot{\varphi} - 2cr^2\varphi \tag{85}$$

Standardform der DGL:

$$\ddot{\varphi} + \overbrace{\frac{2dr^2}{\Theta^A + mr^2}}^{2\delta}\dot{\varphi} + \overbrace{\frac{6cr^2}{\Theta^A + mr^2}}^{\omega_0^2}\varphi = 0 \tag{86}$$

(b)

Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{87}$$
$$= \sqrt{\frac{6cr^2}{\Theta^A + mr^2} - \left(\frac{dr^2}{\Theta^A + mr^2}\right)^2} \tag{88}$$

(c)

Allgemeine Lösung für φ:

$$\varphi = e^{-\delta t}(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)) \tag{89}$$

Anfangsauslenkung:

$$\varphi(t=0) \overset{!}{=} \varphi_0 = A \tag{90}$$

Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = (-\delta)e^{-\delta t}\,(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)) + (\omega_d)e^{-\delta t}\,(-A\sin(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)) \tag{91}$$

Anfangsgeschwindigkeit:

$$\dot{\varphi}(t=0) \overset{!}{=} 0 = -\delta A + \omega_d B \tag{92}$$
$$\Rightarrow B = \frac{\delta}{\omega_d}\varphi_0 \tag{93}$$

Lösung zu diesen Anfangsbedingungen:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t}(\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\omega_d}\sin(\omega_d t)) \tag{94}$$

Aufgabe 6

(a)

Linearisierung der Basisfunktionen:

$$\sin(\varphi) \approx \varphi \qquad \cos(\varphi) \approx 1 \tag{95}$$

Linearisierte DGL:

$$m\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + (c_1 + c_2)\varphi - \frac{mg}{a} = \frac{M_0}{a^2}\cos(\Omega t) \tag{96}$$

(b)

Statische Ruhelage $\varphi \to \varphi_s$ mit $\ddot{\varphi}_s = \dot{\varphi}_s = 0$:

$$(c_1 + c_2)\varphi_s - \frac{mg}{a} = 0 \Rightarrow \varphi_s = \frac{mg}{a(c_1 + c_2)} \tag{97}$$

Auslenkung um statische Ruhelage $\varphi = \varphi_s + \alpha$ und DGL:

$$m\ddot{\alpha} + r\dot{\alpha} + (c_1 + c_2)\alpha = \frac{M_0}{a^2}\cos\Omega t \tag{98}$$

Standardform dieser DGL:

$$\ddot{\alpha} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\delta}\dot{\alpha} + \underbrace{\frac{c_1 + c_2}{m}}_{\omega_0^2}\alpha = \underbrace{\frac{M_0}{ma^2}}_{f_0}\cos\Omega t \tag{99}$$

Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} \tag{100}$$

Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \tag{101}$$

Bedingung für ein schwingfähiges System:

$$\delta^2 < \omega_0^2 \tag{102}$$
$$\frac{r^2}{4m^2} < \frac{c_1 + c_2}{m} \tag{103}$$
$$r^2 < 4m(c_1 + c_2) \tag{104}$$
$$r < 2\sqrt{m(c_1 + c_2)} \tag{105}$$

(c)

Zwei Lösungswege sind möglich: komplexer Ansatz und reellwertiger Ansatz vom Typ der rechten Seite.

komplexer Ansatz

Ersetzung $\cos(\Omega t) \to e^{i\Omega t}$ und $\alpha \to u$:

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = f_0 e^{i\Omega t} \tag{106}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$u = \hat{u}e^{i\Omega t} \tag{107}$$

Einsetzen liefert die komplexe Amplitude $\hat{u}$:

$$(\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega)\hat{u}e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t} \tag{108}$$
$$\Rightarrow \hat{u} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega} \tag{109}$$

Mit den Abkürzungen $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ und $D = \frac{\delta}{\omega_0}$:

$$\hat{u} = \frac{f_0}{\omega_0^2}\frac{1}{1 - \eta^2 + i2\eta D} = \rho e^{-i\vartheta} \tag{110}$$

Amplitude der Lösung ρ:

$$\rho = \frac{f_0}{\omega_0^2}\left[(1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 D^2\right]^{-1/2} \tag{111}$$
$$= f_0\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1/2} \tag{112}$$

Phase der Lösung ϑ mittels konjungiert komplexe Erweiterung:

$$\hat{u} = \frac{f_0}{\omega_0^2}\frac{1 - \eta^2 - i2\eta D}{(1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 D^2} \tag{113}$$
$$\vartheta = \arctan\left(\frac{2\eta D}{1 - \eta^2}\right) \tag{114}$$
$$= \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \tag{115}$$

Alternativ: Phase der Lösung mittels Additionstheorem für den Tangens:

$$\hat{u} = \rho e^{-i\vartheta} = \frac{\rho_z e^{-i\vartheta_z}}{\rho_n e^{-i\vartheta_n}} = \rho_z/\rho_n e^{-i(\vartheta_z - \vartheta_n)} \tag{116}$$
$$\tan(\vartheta) = \tan(\vartheta_z - \vartheta_n) \tag{117}$$
$$= \frac{\tan(\vartheta_z) - \tan(\vartheta_n)}{1 + \tan(\vartheta_z)\tan(\vartheta_n)} \tag{118}$$
$$= -\tan\vartheta_n = \frac{\mathrm{Im}\{Nenner\}}{\mathrm{Re}\{Nenner\}} = \frac{2\eta D}{1 - \eta^2} \tag{119}$$

Reellwertige Lösung $u \to \alpha$:

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\hat{u}\} = \rho\cos(\Omega t - \vartheta) \tag{120}$$

Lösung im eingeschwungenen Zustand:

$$\varphi(t) = \varphi_s + \alpha = \frac{mg}{a(c_1 + c_2)} + \rho\cos(\Omega t - \vartheta) \tag{121}$$

reeller Ansatz

Ansatz:

$$\alpha = \hat{\alpha}\cos(\Omega t - \vartheta) \tag{122}$$
$$= \hat{\alpha}[\cos(\Omega t)\cos(\vartheta) + \sin(\Omega t)\sin(\vartheta)] \tag{123}$$

Ableitung:

$$\dot{\alpha} = -\Omega\hat{\alpha}\left[\sin(\Omega t)\cos(\vartheta) - \cos(\Omega t)\sin(\vartheta)\right] \tag{124}$$
$$\ddot{\alpha} = -\Omega^2\hat{\alpha}\left[\cos(\Omega t)\cos(\vartheta) + \sin(\Omega t)\sin(\vartheta)\right] \tag{125}$$

In die DGL Einsetzen:

$$f_0\cos(\Omega t) = \hat{\alpha}\cos(\Omega t)[\omega_0^2\cos(\vartheta) - \Omega^2\cos(\vartheta) + 2\delta\Omega\sin(\vartheta)] + \hat{\alpha}\sin(\Omega t)[\omega_0^2\sin(\vartheta) - \Omega^2\sin(\vartheta) - 2\delta\Omega\cos(\vartheta)] \tag{126}$$

Der Faktor vor $\cos(\Omega t)$ muss gleich f_0 sein. Der Faktor vor $\sin(\Omega t)$ muss gleich 0 sein. Mit den Abkürzungen $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ und $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ folgen zwei Gleichungen:

$$\hat{\alpha}[(1 - \eta^2)\cos(\vartheta) + 2\eta D\sin(\vartheta)] = \frac{f_0}{\omega_0^2} \tag{127}$$
$$((1 - \eta^2)\sin(\vartheta) - 2\eta D\cos(\vartheta)) = 0 \tag{128}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt die Phasenverschiebung:

$$\tan(\vartheta) = \frac{2\eta D}{1 - \eta^2} \Rightarrow \vartheta = \arctan\left(\frac{2\eta D}{1 - \eta^2}\right) \tag{129}$$
$$= \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \tag{130}$$

Addiert man die Quadrate beider Gleichungen folgt die Amplitude zu:

$$\hat{\alpha} = \frac{f_0}{\omega_0^2}\left[(1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 D^2\right]^{-1/2} \tag{131}$$
$$= f_0\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1/2} \tag{132}$$

Lösung im eingeschwungenen Zustand:

$$\varphi(t) = \varphi_s + \alpha = \frac{mg}{a(c_1 + c_2)} + \hat{\alpha}\cos(\Omega t - \vartheta) \tag{133}$$