

Klausur - Kinematik und Dynamik - SoSe 2013

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser umrahmte Bereich ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

Nachname _____	Vorname _____
Studiengang _____	Matrikelnummer _____
Art der Klausur:	<input type="radio"/> Prüfungsklausur <input type="radio"/> Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ 1 - 6	Kurzfragenteil	Sichtung
Punkte							/ 80	/ 20	

Die Klausur umfasst acht Rechenaufgaben und einen Kurzfragenteil. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 40 von 100 Punkten erreicht werden, jedoch muss dabei der Kurzfragenteil mit mind. 10 von 20 Punkten bestanden werden.

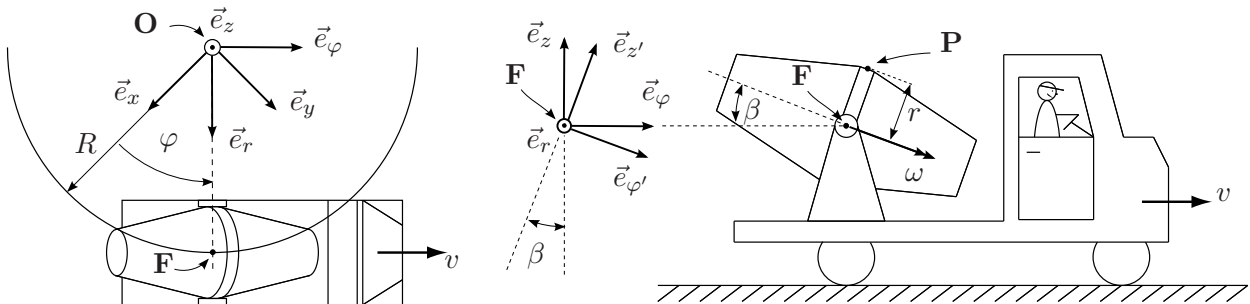
Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils** direkt auf dem Klausurblatt ein (nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!).

Es werden alle **Rechenaufgaben** gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden nicht beachtet. Es ist immer anzugeben, auf welchen Aufgabenteil sich eine Lösung bezieht. Lösungen sind zweimal zu unterstreichen. Alle Lösungen sind explizit in den gegebenen Größen auszudrücken. Wenn Abkürzungen verwendet werden, sind diese eindeutig bei der Lösung anzugeben. Kontrollieren Sie die Dimension Ihrer Ergebnisse.

1 Punktkinematik

2+3+4=9 Punkte

Ein Zementtransporter, dessen Mischtrommel sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω bei einer konstanten Schrägstellung β dreht, durchfährt in horizontaler Ebene eine Linkskurve vom Radius R mit der konstanten Geschwindigkeit v . Der Punkt F liegt im Mittelpunkt der Trommel. Der Punkt P befindet sich außen an der rotierenden Trommel. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $\varphi = 0$ und P befindet sich am höchsten Punkt.



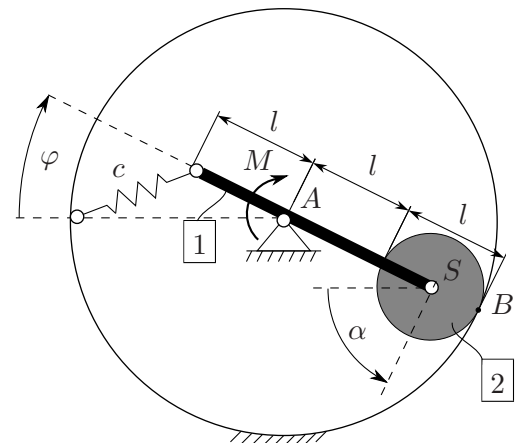
- Geben Sie den Verbindungsvektor \vec{x}_{FP} von Punkt F nach Punkt P in der Basis $(\vec{e}_{\varphi'}, \vec{e}_{z'}, \vec{e}_r)$ an. Beachten Sie dabei, dass sich die Trommel mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht.
- Geben Sie den Verbindungsvektor \vec{x}_{OP} von Punkt O nach Punkt P in der Basis $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\varphi}, \vec{e}_z)$ an.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes P in der Basis $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\varphi}, \vec{e}_z)$.

Geg.: r, R, v, β, ω

2 Energie- und Arbeitssatz

4+9+4=17 Punkte

Eine Stange (Körper 1, m_1, Θ_1^A) ist im Mittelpunkt eines Hohlrades gelagert. An einem Ende ist eine Rolle (Körper 2, m_2, Θ_2^S) befestigt, die auf dem Hohlrad abrollt (kein Gleiten). Am anderen Ende der Stange ist eine Feder der Steifigkeit c befestigt. Weiterhin wirkt auf die Stange ein Moment M . In der Lage $\varphi = 0$ ist $\alpha = 0$ und die Feder entspannt. Vernachlässigen sie den Einfluss der Schwerkraft.



- Bestimmen Sie einen Zusammenhang zwischen α und φ . Zeigen Sie, dass für die Längenänderung $x(\varphi)$ der Feder als Funktion des Winkels φ gilt:

$$\frac{x}{l} = \sqrt{5 - 4 \cos \varphi} - 1 \quad (1)$$

Hinweis: Verwenden Sie (1) für die Aufgaben (b) bis (c).

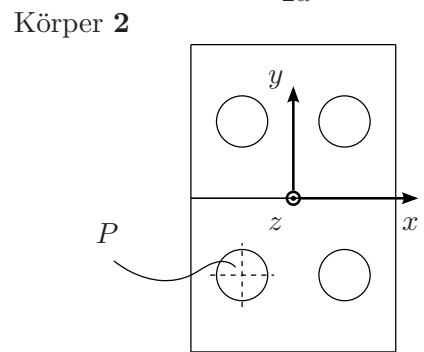
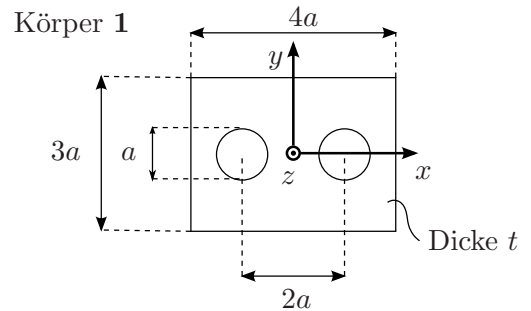
- Für den Ausgangszustand sei $\varphi_1 = \pi$ und $\dot{\varphi}_1 = 0$. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass das Lager in A Reibungsbehaftet ist ($|M| = +M_R$) die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2$, wenn die Stange um $\varphi_2 = \pi/2$ ausgelenkt ist.
- Für den Ausgangszustand sei $\varphi_1 = 0$ und $\dot{\varphi}_1 = 0$. Das nun reibungsfreie System soll durch ein Antriebsmoment $M = M_A > 0$ angetrieben werden. Wie groß muss M_A gewählt werden, damit das System mindestens die Lage $\varphi_2 = \pi$ erreicht?

Geg.: $m_1, \Theta_1^A, m_2, \Theta_2^S, l, c, M_R > 0, g = 0$

3 Massenträgheitsmoment

6+4+2=12 Punkte

Gegeben sind zwei Körper (1, 2) gleicher Dicke t , die sehr klein ist ($t \ll a$). Körper 1 ist symmetrisch bezüglich der x - und y -Achse, und weist zwei Bohrungen auf. Der Körper 2 ist vollständig aus zwei identischen Körpern 1 zusammengesetzt. Die Trägheitsmomente der elementaren Körper sollen angegeben, jedoch nicht durch Integration berechnet werden.



Fassen Sie ihre Ergebnisse immer zu **zwei Summanden** zusammen.

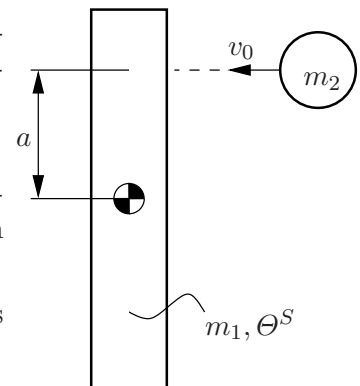
- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment von Körper 1 bezüglich eigenem Schwerpunkt und der z -Achse: $\Theta_{zz,1}^S$.
- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment von Körper 2 bezüglich eigenem Schwerpunkt und der z -Achse: $\Theta_{zz,2}^S$.
- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment von Körper 2 bezüglich dem Punkt P und der z -Achse: $\Theta_{zz,2}^P$.

Geg.: a, t, ρ

4 Impulserhaltung (bekannte Aufgabe)

6+4=10 Punkte

Eine Kugel (m_2) stößt mit der Geschwindigkeit v_0 gegen einen frei beweglichen, ruhenden Klotz ($m_1, \Theta^S = \frac{1}{2}m_1a^2$). Nach dem Stoß ist die Geschwindigkeit der Kugel null.



- Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit ω des Klotzes und die Geschwindigkeit seines Schwerpunkts v nach dem Stoß? (Der Stoß kann nicht als ideal elastisch angenommen werden.)
- Berechnen Sie für den Fall eines ideal elastischen Stoßes das Verhältnis der Massen m_1/m_2 .

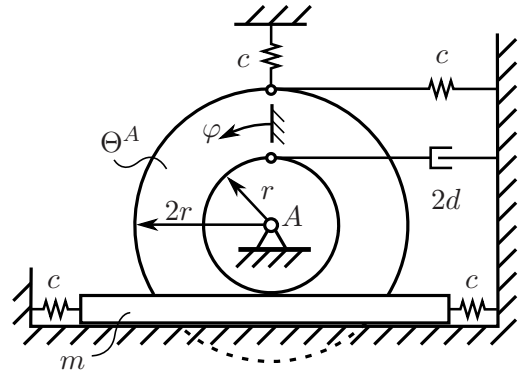
Geg.: $m_1, m_2, a, v_0, \Theta^S = \frac{1}{2}m_1a^2$

5 Freie Schwingungen

12+1+4=17 Punkte

Das gezeigte System besteht aus einer drehbar gelagerten Kreisscheibe und einer reibungsfrei geführten Stange. Die Kreisscheibe (Massenträgheitsmoment Θ^A) rollt ohne Schlupf auf der Stange (Masse m) ab. Beide Körper sind über lineare Federn und einen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer an die Umgebung gekoppelt. In der eingezeichneten Lage sind die Federn entspannt. Die Ausrichtung der Federn und des Dämpfers bleiben stets gleich. Zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens sind die folgenden Teilaufgaben zu bearbeiten:

- Geben Sie für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$ die lineare Differentialgleichung des Systems in der Koordinate φ an. Benutzen Sie Abkürzungen für die Abklingkonstante δ und die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 .
- Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems.
- Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus (a) an. Bestimmen Sie hiermit zusätzlich die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0$.



Geg.: $m, \Theta^A, r, c, d, \varphi_0$

6 Erzwungene Schwingungen

2+5+8=15 Punkte

Ein System soll bezüglich seines Verhaltens bei harmonischer Anregung untersucht werden. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{\varphi} + c_1 \sin \varphi \cos \varphi + r\dot{\varphi} \cos^2 \varphi + c_2 \sin \varphi - \frac{mg}{a} \cos \varphi = \frac{M_0}{a^2} \cos(\Omega t).$$

- Linearisieren Sie die Gleichung für kleine Winkel $\varphi \ll 1$.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) und (c) die linearisierte Form der Differentialgleichung.

- Geben Sie die statische Ruhelage φ_s und die Bewegungsgleichung für die Auslenkung ($\alpha = \varphi - \varphi_s$) um diese an. Geben Sie weiterhin die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften und die Eigenkreisfrequenz ω_d des gedämpften Systems an. Wie lautet die Bedingung an die Dämpferkonstante r , damit das System frei schwingen kann?
- Berechnen Sie die Lösung $\varphi(t)$ der Differentialgleichung für den eingeschwungenen Zustand. Geben Sie die einzelnen Rechenschritte explizit an. Geben Sie die Phase und Amplitude der Lösung an.

Geg.: $m, c_1, c_2, r, a, g, \Omega, M_0$

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

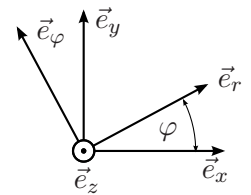
Massenträgheitsmoment	$\Theta^{(A)}$	
Federsteifigkeit der Dehnfeder	c	
kinetische Energie	K	
Erregerkreisfrequenz	Ω	

1 Punkt

2. Gegeben sei der Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}_x$ des Punktes P . Geben Sie \vec{r} im um den Winkel φ gedrehtem Koordinatensystem $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ an.

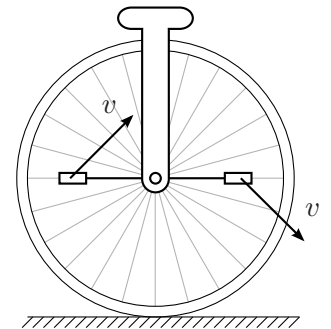
$\vec{r} =$

Geg.: $\vec{r} = x\vec{e}_x$, x , φ



1 Punkt

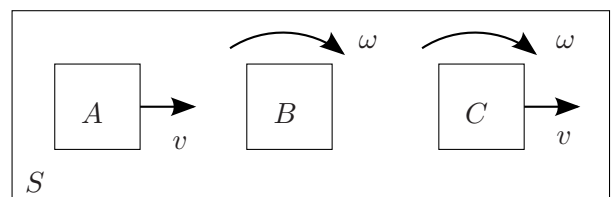
3. Ein Einrad, bestehend aus Rad und Rahmen mit Sattel, rolle mit **Schlupf**. Zeichnen Sie den Momentanpol des Rades ein.



Geg.: v

1 Punkt

4. System S sei ein Inertialsystem. Welches der Systeme (A, B, C) ist dann ebenfalls ein Inertialsystem?



Geg.: $v = \text{const} \neq 0$, $\omega = \text{const} \neq 0$

1 Punkt

5. Ein Rad rolle mit **Schlupf**. Benennen Sie für diesen Fall die Größe, die sich aus dem Quotienten der Reibkraft zu der Normalkraft ergibt.

„ $\frac{F_R}{F_N}$ “ heißt ...

1 Punkt

6. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen ausschließlich in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Stoßzahl	e	
Dämpfungsmaß	D	
Winkelbeschleunigung	$\ddot{\varphi}$	
Impuls	\vec{p}	

1 Punkt

7. Ein Fallschirmspringer unterliege der Schwerkraft $F_g = mg$ und einer zur Geschwindigkeit zum Quadrat proportionalen Widerstandskraft $F_w = \frac{1}{2}c_w\rho Av^2$. Wie groß ist seine maximale Fallgeschwindigkeit?

$$v_{max} =$$

Geg.: $F_g = mg$, $F_w = \frac{1}{2}c_w\rho Av^2$, m , g , c_w , ρ , A

1 Punkt

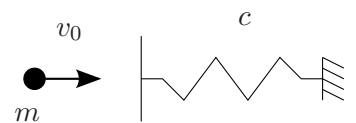
8. Ein ruhender Körper zerfällt in drei gleich schwere Teilkörper. Die Geschwindigkeiten zweier Körper (\vec{v}_1 und \vec{v}_2) sind bekannt. Geben Sie die Geschwindigkeit des dritten Körpers an.

$$\vec{v}_3 =$$

Geg.: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1 Punkt

9. Eine Körper mit Masse m prallt mit der Geschwindigkeit v_0 gegen eine entspannte Feder mit Steifigkeit c . Geben Sie die maximale Deformation x der Feder an.



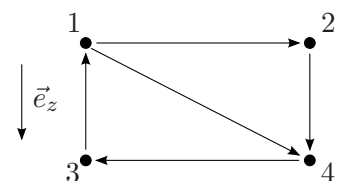
$$x =$$

Geg.: m , c , v_0

1 Punkt

10. Ein Körper bewegt sich auf verschiedenen Wegen durch ein konstantes Kraftfeld, welches in \vec{e}_z Richtung wirkt. Setzen Sie die Arbeiten, die das Kraftfeld an dem Körper verrichtet, in Relation zueinander ($<$, $>$, $=$).

$$W_{12} \quad \square \quad W_{43} \qquad W_{14} \quad \square \quad W_{24}$$



1 Punkt

11. Eine Kugel stoße senkrecht gegen eine feste Wand. Der Stoß sei teilelastisch mit Stoßzahl $e = 0,5$. Um welchen Faktor ändert sich ihre kinetische Energie bei diesem Stoß (K_0 kinetische Energie vor dem Stoß, K_1 kinetische Energie nach dem Stoß)?

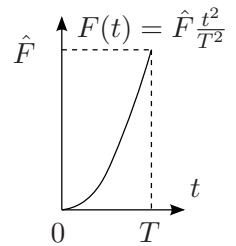
$$\frac{K_1}{K_0} =$$

Geg.: $e = 0,5$

1 Punkt

12. Eine Masse m erfährt über einen Zeitraum $0 < t < T$ eine Kraft $F(t)$, welche in Bewegungsrichtung wirkt. Um welchen Betrag ändert sich dann ihre Geschwindigkeit?

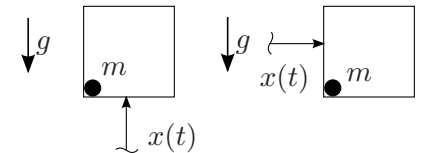
$$\Delta v =$$



Geg.: $m, F(t) = \hat{F}t^2/T^2, \hat{F}, T$

1 Punkt

13. Ein Fahrstuhl bewege sich im linken Bild vertikal und im rechten Bild horizontal. Geben Sie die Relation ($<, >, =$) zwischen den Beträgen der vom Fahrstuhl auf die Masse m ausgeübten Kraft an.

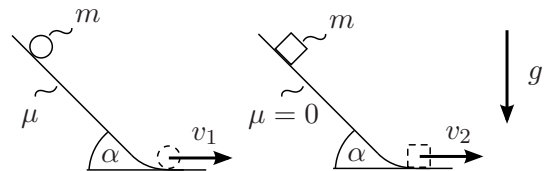


$$|F_{Links}| \quad \square \quad |F_{Rechts}|$$

Geg.: $x(t) = 2gt^2, g, m$

1 Punkt

14. Eine Kugel und ein Klotz bewegen sich unter Einfluss der Schwerkraft eine schiefe Ebene hinab. Die Kugel rollt **ohne Schlupf**. Der Klotz rutscht reibungsfrei. Geben Sie die Relation ($<, >, =$) zwischen den Endgeschwindigkeiten an.

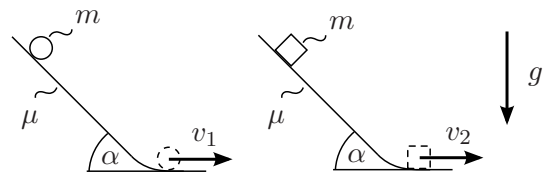


$$v_1 \quad \square \quad v_2$$

Geg.: α, μ, m, g

1 Punkt

15. Eine Kugel und ein Klotz bewegen sich unter Einfluss der Schwerkraft eine schiefe Ebene hinab. Die Kugel rollt **mit Schlupf**. Der Klotz rutscht. Geben Sie die Relation ($<, >, =$) zwischen den Endgeschwindigkeiten an.



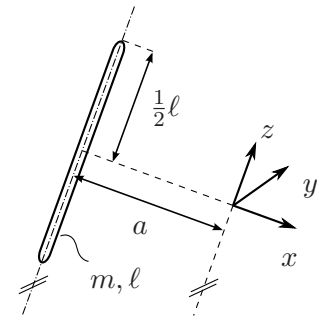
$$v_1 \quad \square \quad v_2$$

Geg.: α, μ, m, g

1 Punkt

16. Betrachten Sie den langen, dünnen Stab mit der Länge ℓ und der Masse m . Geben Sie das Massenträgheitsmoment Θ_{yy} bezüglich der eingezeichneten Achse y an.

$$\Theta_{yy} =$$

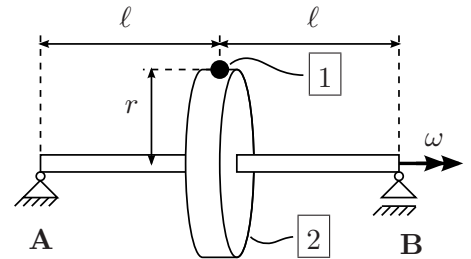


Geg.: a, ℓ, m

1 Punkt

17. Betrachten Sie eine auf der Symmetrieachse gelagerte Kreisscheibe (2), an deren Umfang eine Punktmasse (1) exzentrisch angebracht wurde. Geben Sie den Betrag der Lagerreaktion in **A** an, wenn die Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

$$|F_A| =$$



Geg.: $m_1, m_2, \Theta_2^S, r, \omega, \ell$

1 Punkt

18. Es zeigt sich, dass sich die mittlere Energie eines gedämpft schwingenden Systems nach dem Gesetz $\langle \dot{E} \rangle = -2\delta \langle E \rangle$ verhält. Die mittlere Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ sei mit $\langle E_0 \rangle$ gegeben. Geben Sie den zeitlichen Verlauf der mittleren Energie an!

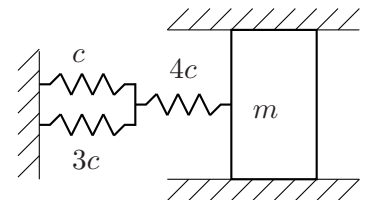
$$\langle E \rangle =$$

Geg.: $\langle \dot{E} \rangle = -2\delta \langle E \rangle, \delta, \langle E_0 \rangle$

1 Punkt

19. Geben Sie die Eigenkreisfrequenz des Systems an.

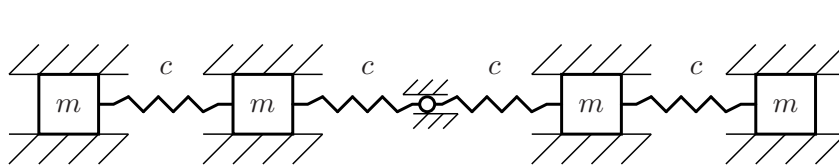
$$\omega_0 =$$



Geg.: c, m

1 Punkt

20. Das dargestellte System besteht aus vier Massen und Federelementen. In der Mitte sind zwei Federn durch einen masselosen Knoten verbunden. Geben Sie an, wie viele Eigenfrequenzen und Eigenformen das System besitzt.



Eigenfrequenzen

Eigenformen

Geg.: c, m

1 Punkt