

### I. Wellengleichung

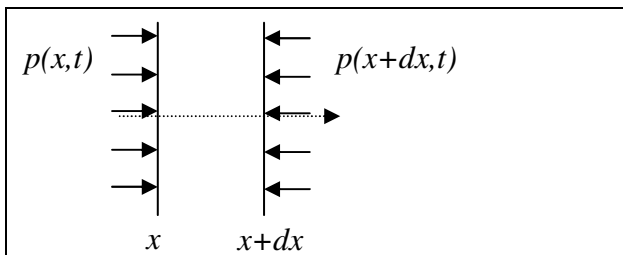
Die Ursache für Schallausbreitung ist die Abhängigkeit des Druckes von der Dichte

$p = p(\rho)$ : eine heterogene Verschiebung verursacht eine Änderung der Dichte  $\Rightarrow$  diese verursacht eine nicht homogene Druckverteilung  $\Rightarrow$  diese bewirkt eine Bewegung. Die Druckänderungen bei Schallausbreitung sind meistens sehr klein: Einem starken Schall mit der Intensität 60dB entspricht eine Druckamplitude von  $2 \cdot 10^{-7}$  bar. Für die kleinen Druckänderungen gilt

$$p(\rho_0 + \Delta\rho) = p(\rho_0) + \left(\frac{dp}{d\rho}\right) \Delta\rho$$

$$p(\rho_0) + \Delta p = p(\rho_0) + \kappa \Delta\rho, \quad \boxed{\Delta p = \kappa \Delta\rho}$$

Betrachten wir eine ebene Welle, die sich in Richtung der  $x$ -Achse ausbreitet und innerhalb dieser ein infinitesimal kleines Volumenelement mit Länge  $dx$  und Fläche  $A$ .



Die Verschiebung aus dem Gleichgewichtszustand bezeichnen wir durch  $u(x,t)$ .

Wegen der Massenerhaltung gilt

$$\rho_0 \Delta x = \rho(t) \left( \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) =$$

$$(\rho_0 + \Delta\rho) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x = \Delta x \cdot \left( \rho_0 + \Delta\rho + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Daraus folgt  $\boxed{\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}}$ .

Die Bewegungsgleichung lautet

$$dm \cdot \ddot{u} = A (p(x) - p(x+dx)) = -A \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

oder  $\boxed{\rho_0 \ddot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$ .  $\Rightarrow$

$$\rho_0 \ddot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} = \kappa \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

oder  $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ .

Das ist eine Wellengleichung mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\boxed{c = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\partial p / \partial \rho}}$ .

### II. Schallgeschwindigkeit

Berechnung von Newton (nicht korrekt!).

Für Gase gilt  $p = nkT = \frac{\rho kT}{m}$ . Aus der kinetischen Gastheorie ist bekannt, dass

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle. \quad \text{Somit} \quad p = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle.$$

$$c = \sqrt{\partial p / \partial \rho} = \sqrt{\langle v^2 \rangle / 3}.$$

Korrekte Berechnung

In Wirklichkeit erwärmt sich das Gas beim Komprimieren und deshalb gilt

$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma$ . Für Moleküle, die aus zwei Atomen bestehen, ist  $\gamma = 1.4$ . Das heißt

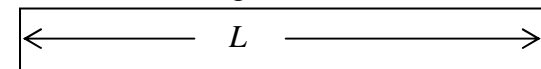
$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{3} \langle v^2 \rangle.$$

Die Schallgeschwindigkeit ist

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{3} \langle v^2 \rangle} \approx 0.7 \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

### III. Eigenfrequenzen

Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen eines an beiden Seiten geschlossenen Rohres.



Lösung: Wir lösen die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$$

mit Hilfe des Bernoulli-Ansatzes

$$u(x,t) = A \cos \omega t \cdot \sin kx,$$

wobei die Randbedingung am linken Rand bereits berücksichtigt wurde. Das Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert  $\omega^2 = c^2 k^2$ .

Die zweite Randbedingung liefert

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = \pi n \Rightarrow k = \pi n / L \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \pi c n / L}$$

**IV.** Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen eines **auf einer Seite offenen Rohres**.

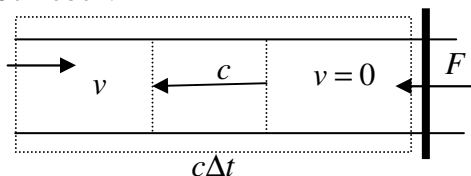
Lösung: Am offenen Ende des Rohres ist der Druck ungefähr gleich dem atmosphärischen Druck und der Überdruck Null. Aus

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{folgt} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

Die gleiche Aufgabe wie oben ist nun mit einer geänderten Randbedingung zu lösen  $\Rightarrow \cos(kL) = 0, \quad kL = \pi / 2 + \pi n$ .

## V. Hydrodynamischer Schlag

Die Strömung in einem Rohr muss schnell durch einen Absperrschieber aufgehalten werden. Welcher Druck wirkt dabei auf den Schieber?



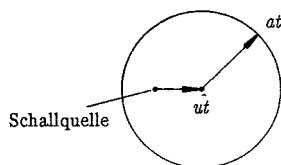
Die Änderung des Impulses des Kontrollvolumens ist  $\Delta P = 0 - \rho A c \Delta t v$ . Nach dem Impulssatz gilt  $\Delta P / \Delta t = -\rho v c A = -F$ . Der Druck ist demnach

$$p = F / A = \rho v c.$$

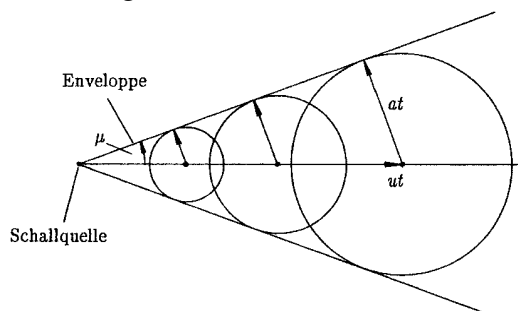
Z.B. für Wasser bei  $v = 1 \text{ m/s}$  ist  $p = 10^3 \cdot 10^3 = 1 \text{ MPa} = 10 \text{ bar}$ .

## VI. Überschallströmungen

Wir betrachten eine stationäre Strömung (Geschwindigkeit  $u$ ) mit einer ortsfesten Schallquelle, die zu einer bestimmten Zeit ein Signal aussendet. Bei  $u < c$  sieht die Welle zum Zeitpunkt  $t$  wie folgt aus.



Für  $t \rightarrow \infty$  wird die Schallwelle den gesamten Raum erreichen. Ist  $u > c$ , so ergibt sich die im nächsten Bild skizzierte Lage der Schallwelle. Für  $t \rightarrow \infty$  wird die Schallwelle nicht den gesamten Raum erreichen.



Die einhüllende Kurve, deren halber Öffnungswinkel  $\mu$  sich aus der Gleichung

$$\sin \mu = \frac{c}{u} = \frac{1}{M}$$

berechnet, nennt man den *Machschen Kegel*. Die Zahl  $M = u / c$  ist die *Machsche Zahl*.

## VII. Schallenergie, Energiestromdichte

Eine Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega$  hat die Form  $x = x_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$ .

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$v = v_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = x_0 \omega \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right).$$

Die kinetische Energie pro Volumeneinheit

$$\text{ist } K/V = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right).$$

Der Mittelwert der kinetischen Energie:

$$\langle K/V \rangle = \frac{\rho}{4} x_0^2 \omega^2.$$

Die Gesamtenergie bei kleinen Schwingungen ist das Zweifache der kinetischen Energie. Die gesamte *Energiedichte E* ist also

$$E = 2 \langle K/V \rangle = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2.$$

Diese Energie "fließt" mit der Schallgeschwindigkeit. Der *Energiefluss* (auch *Schallintensität*) ist deshalb gleich

$$I = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2 c$$

Für die Dichte ergibt sich

$$\Delta \rho = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \rho \frac{x_0 \omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right),$$

und für den Druck

$$\Delta p = \kappa \Delta \rho = \kappa \rho \frac{x_0 \omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = \Delta p_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right).$$

Die Amplitude der Druckoszillationen ist

$$\Delta p_0 = \kappa \rho \frac{x_0 \omega}{c}.$$

Für die Intensität als Funktion der Druckamplitude erhalten wir

$$I = \frac{\rho}{2} \frac{c^3 \Delta p_0^2}{\kappa^2 \rho^2} = \frac{\Delta p_0^2}{2 \rho c}.$$

Ist die Druckamplitude größer als der mittlere Druck, so kann es zur Kavitation kommen.

Im Wasser ist dafür mindestens die Energie-

$$\text{stromdichte } I = \frac{\Delta p_0^2}{2 \rho c} = \frac{(10^2)^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^3} = 5 \text{ kW/m}^2$$

erforderlich.

## VIII. Relative Lautstärke

Zur Charakterisierung der Schallintensität wird eine dimensionslose Größe

$$J = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{p}{p_{\text{ref}}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{I}{I_{\text{ref}}} \right) \text{ dB}$$

(dB: *Dezibel*) benutzt, wobei  $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-10}$

bar ein Referenzdruck ist. Unterscheiden sich zwei Intensitäten um das 10fache, so unterscheiden sich ihre relativen Lautstärken um 10 dB.