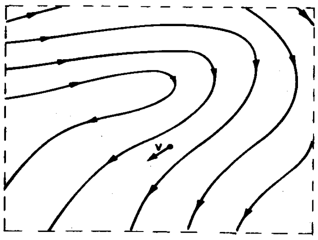
Kontinuitätsgleichung, Bernoullische Gleichung

Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III", Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4“

I. Geschwindigkeitsfeld und Stromlinien in einer Flüssigkeit



II. Flüssigkeitsbewegung in einer Stromröhre

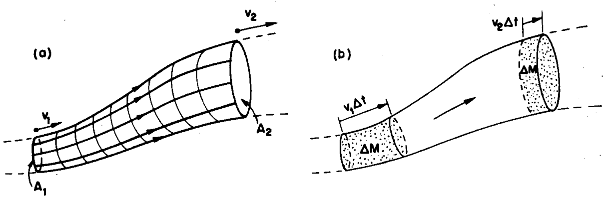
A. Kontinuitätsgleichung

Stationäre Strömung $\Rightarrow$ Bei A_1 fließt gleich viel Masse ein, wie bei A_2 ausströmt:

$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$. Somit

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ oder

$\boxed{\rho A v = const}$ (*Kontinuitätsgleichung*)



B. Die vom Flüssigkeitsdruck geleistete Arbeit:

Annahmen: keine viskosen Kräfte, inkompressible Flüssigkeit. Die Arbeit, die an der bei A_1 eintretenden Flüssigkeit geleistet wird, ist $p_1 A_1 v_1 \Delta t$. Die Arbeit an der bei A_2 austretenden Flüssigkeit $-p_2 A_2 v_2 \Delta t$. Die gesamte Arbeit ist gleich der Energiezunahme einer Masse ΔM, die sich von A_1 nach A_2 bewegt:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = E_2 - E_1$$

$$E = \Delta M \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi \right)$$

potentielle Energie pro Masseneinheit (Potential)

kinetische Energie pro Masseneinheit

Nach Division durch ΔM:

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\underbrace{\Delta M}_{\rho_1 A_1 v_1 \Delta t}} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\underbrace{\Delta M}_{\rho_2 A_2 v_2 \Delta t}} = \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - \phi_1$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 \quad \text{oder}$$

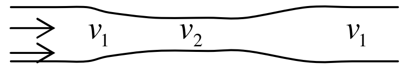
$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = const \qquad (1)$$

(*Bernoullische Gleichung)*

Z.B. im Gravitationsfeld $(\phi = gz)$:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = const$$

Beispiel 1. Sich verjüngendes Rohr.

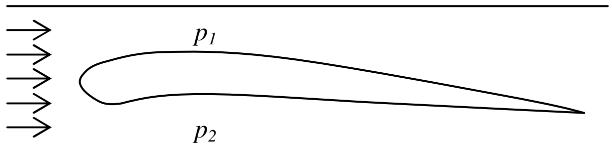


Aus der Bernoulli-Gleichung folgt

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 .$$

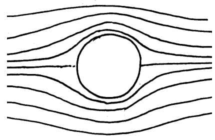
Aus der Kontinuitätsgleichung $v_2 > v_1$. Deshalb $p_2 < p_1$. In Bereichen mit größerer Geschwindigkeit (in engeren Bereichen) ist der Druck kleiner!

Beispiel 1a. Ein Flügel

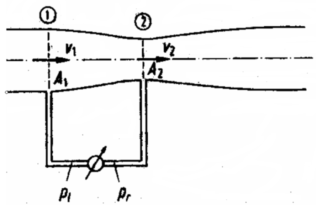


Beispiel 2. Die auf einen laminar umströmten (symmetrischen) Körper wirkende Kraft.

Die Druckverteilung ist symmetrisch. Die Gesamtkraft ist *Null*.



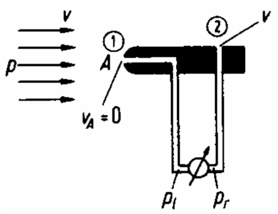
Beispiel 3. Messung des Volumenstroms.

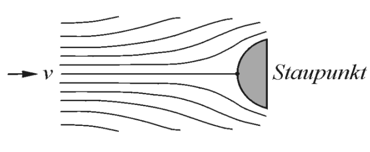


Der Volumenstrom Q ist konstant im Rohr, deshalb gilt $v_1 = Q / A_1$, $v_2 = Q / A_2$. Einsetzen in (1) liefert

$$Q = \sqrt{\frac{2 A_1^2 A_2^2 (p_1 - p_2)}{\rho \left(A_1^2 - A_2^2 \right)}} .$$

Beispiel 4. Messung der Strömungsgeschwindigkeit (Prandtl-Rohr).





Die Geschwindigkeit im Punkt A (Staupunkt) ist Null.

Die Bernoulli-Gleichung:

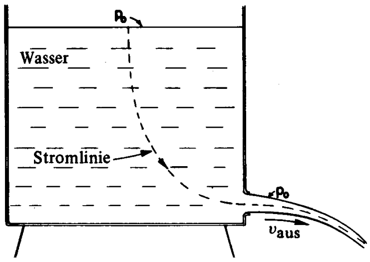
$$p_l - p_r = \tfrac{1}{2}\rho v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2(p_l - p_r)/\rho}\,.$$

Beispiel 5. Ausfluss aus einem Gefäß mit einer Spiegelgröße A_s und einer kleinen Öffnung A.

Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}0^2 + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_{aus}{}^2 + 0$$

$$\boxed{v_{aus} = \sqrt{2gh}}$$



(Ausfluss-formel von Toricelli)

Die Änderung der Spiegelhöhe ist $v_s = -\dfrac{dh}{dt}$.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$A_s v_s = A v_{aus} \quad \Rightarrow \quad v_s = A v_{aus} / A_s\,.$$

Aus beiden Gleichungen

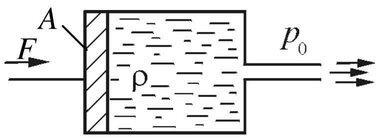
$$dh = -\frac{A}{A_s} v dt = -\frac{A}{A_s}\sqrt{2gh}\cdot dt$$

Trennen der Veränderlichen und Integration liefern

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A}{A_s}\sqrt{2g}\cdot\int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{A_s}{A}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right).$$

Beispiel 6. Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit.



$$\frac{p}{\rho} + 0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\frac{p - p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{2F}{A\rho}}$$

III. Kompressible Medien

Im allgemeinen Fall gilt für eine stationäre Strömung ($\partial\vec{v}/\partial t = \vec{0}$):

$$\left(\tfrac{1}{2}\nabla v^2 + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\phi\right) = 0\,.$$

(entlang einer Stromlinie!)

Für kompressible Medien mit $\rho = \rho(p)$

$$\frac{\nabla p}{\rho(p)} = \nabla\Gamma(p)\,, \qquad \Gamma(p) = \int\frac{dp}{\rho(p)}$$

Die Bernoulli-Gleichung nimmt die Form

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \Gamma(p) + \phi = const$$

an, oder

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \int\frac{dp}{\rho(p)} + \phi = const.$$

Für ein ideales Gas gilt $\rho = p/b$,
$\Gamma(p) = b\ln p$,
Bernoulli-Gleichung:
$\dfrac{v^2}{2} + \phi + b\ln p = const$

<u>Ausströmungsgeschwindigkeit eines Gases (s. Beispiel 6)</u>

$$\rho = p/b, \quad F(p) = \int\frac{dp\cdot b}{p} = b\ln p$$

$$b\ln p = \frac{v^2}{2} + b\ln p_0\ ; \quad v = \sqrt{2b(\ln p/p_0)}$$

z.B. bei $p = 2p_0$, $b = 0{,}7c^2 \rightarrow v \simeq c$