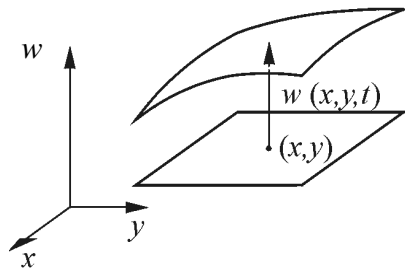
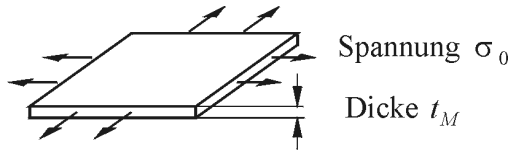


I. Bewegungsgleichung für eine Membran.

Genauso wie eine Saite, hat eine *Membran* keine Biegesteifigkeit. Sie wird erst durch eine Vorspannung elastisch. Betrachten wir eine in allen Richtungen gleich gespannte Membran (Spannung σ_0).



Zunächst betrachten wir eine Biegung, die nur von einer Koordinate y abhängt: $w = w(y,t)$ und "schneiden" aus der Membran ein Streifen mit der Tiefe dx .

Schnitt in der (W,y) - Ebene



$$dm \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S(w'(y+dy) - w'(y))$$

$$= S \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy [\sigma_0 dx t_M]$$

Daraus folgt

$$\underbrace{\rho t_M dx dy}_{dm} \ddot{w} = \sigma_0 t_M \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \Rightarrow \rho \ddot{w} = \sigma_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

oder

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \text{ mit } c^2 = \sigma_0 / \rho$$

Mit Berücksichtigung der Biegung in der x - Richtung:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} \text{ mit } c^2 = \sigma_0 / \rho$$

Zweidimensionale Wellengleichung

Die Ableitungen auf der rechten Seite verkürzt man oft zu

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

wobei $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplace-Operator ist.

Die Wellengleichung kann dann auch in der Form $\boxed{\ddot{w} = c^2 \Delta w}$ geschrieben werden.

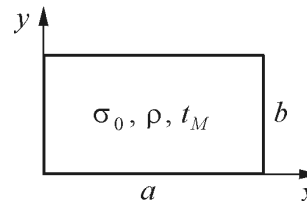
II. Bernoulli-Ansatz. Die zweidimensionale Wellengleichung kann immer mit dem Bernoulli-Ansatz gelöst werden:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot \cos \omega t$$

Das ist besonders sinnvoll, wenn nach Eigenfrequenzen gefragt wird. Einsetzen in die Wellengleichung liefert für den Ortsteil des Ansatzes die folgende Gleichung

$$\underbrace{\Delta W + k^2 W = 0}_{\text{Helmholtz-Gleichung}} \text{ mit } k = \omega / c$$

Beispiel 1: Gegeben ist eine Rechteckmembran mit fest gelagerten Rändern. Zu finden sind die Eigenschwingungsformen und die Eigenfrequenzen.



Lösung: Die Lösung in Form eines Bernoulli-Ansatzes lautet: $w(x, y, t) = W(x, y) \cdot \cos \omega t$ Die Ortsfunktion $W(x, y)$ suchen wir wiederum in Form eines Produktes

$$W(x, y) = X(x)Y(y)$$

mit

$$\begin{cases} X = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \\ Y = C \cos \beta y + D \sin \beta y \end{cases}$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung ergibt $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

Jetzt benutzen wir die Randbedingungen:

$$W(0, y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \quad A = 0$$

$$W(a, y) = 0 \rightarrow X(a) = 0 \quad B \sin \alpha a = 0$$

$$W(x, 0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \quad C = 0$$

$$W(x, b) = 0 \rightarrow Y(b) = 0 \quad D \sin \beta b = 0$$

Daraus folgt

$$\sin \alpha a = 0 \rightarrow \alpha_m = m\pi/a \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\sin \beta b = 0 \rightarrow \beta_n = n\pi/b \quad n = 1, 2, \dots$$

$$k_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Die Eigenfrequenzen sind somit

$$\omega_{mn} = k_{mn}c = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

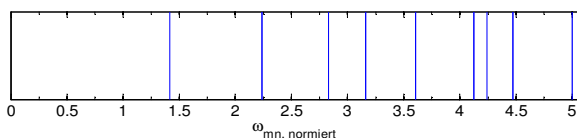


Bild 1. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Membran bei $a = b$ normiert auf $\pi c/a$.

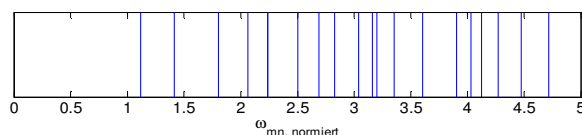
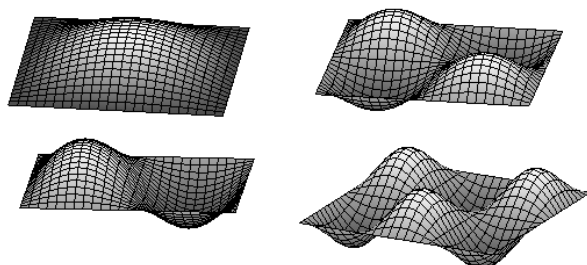


Bild 2. Dasselbe bei $b = 2a$ normiert auf $\pi c/a$.

Die Eigenfunktionen sind :

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Die ersten vier Eigenschwingungsformen:



Eine weiterführende Bemerkung: Die allgemeine Lösung der 2D-Wellengleichung kann nicht nur in der Form $w = \sin kx$, $w = \sin ky$ oder dem Produkt daraus gesucht werden, sondern auch in der allgemeineren Form $w = \sin(k_x x + k_y y) = \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$. Den Vektor $\vec{k} = (k_x, k_y)$ nennt man *Wellenvektor*. Der Wellenvektor steht immer senkrecht zu den Linien konstanter Phase. Er gibt die Richtung der Wellenausbreitung an.

III. Plattenschwingungen

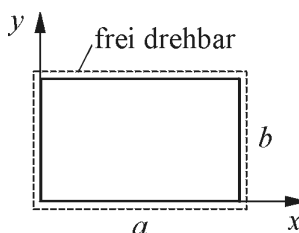
$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \Delta \Delta w = 0 ; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1)$$

h - Dicke, E - Elastischer Modul, ν - Poisson-Zahl, ρ - Dichte. Der Operator $\Delta \Delta$ entspricht einem zweimal nacheinander angewendeten Laplace-Operator:

$$\Delta \Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Beispiel: zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen einer am Rand frei drehbar gelagerter Platte



Benutzen wir gleich den Ansatz

$$W(x, y, t) = F \sin \alpha x \cdot \sin \beta y \cos \omega t,$$

der die Randbedingungen bei $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt.

Einsetzen in die Gleichung (1) liefert

$$-\rho \omega^2 + \frac{D}{h} (\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0. \quad \text{Daraus:}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (\alpha^2 + \beta^2)$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\alpha_m = \pi m/a, \quad \beta_n = \pi n/b, \quad \text{und somit}$$

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Die ersten Eigenformen sind dieselben wie bei einer Membran, aber die Frequenzen sind verschieden.

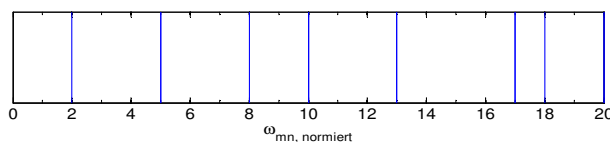


Bild 3. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Platte bei $a = b$ normiert auf $\pi^2/a^2 \cdot \sqrt{D/\rho h}$.

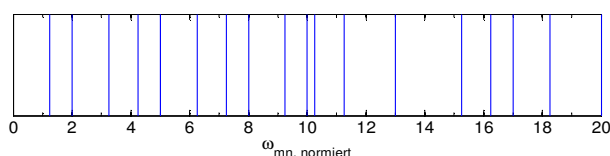


Bild 4. Dasselbe bei $b = 2a$ normiert auf $\pi^2/a^2 \cdot \sqrt{D/\rho h}$.