Auf den folgenden Seiten ist der Aufgabenkatalog für Kontinuumsmechanik abgedruckt, aus dem jede Woche Aufgaben für die Plenarübung, die Tutorien und das eigenständige Arbeiten ausgewählt werden. Lösungen zu den Tutoriums- und Hausaufgaben werden ungefähr eine Woche nach Bearbeitung veröffentlicht. Leider schleichen sich manchmal in die veröffentlichten Lösungen Fehler ein. Wir bemühen uns, diese möglichst zügig zu beseitigen. Jede Studentin und jeder Student ist aber in erster Linie selbst verantwortlich: Darum bitte selbständig rechnen! Wer gerne noch mehr Aufgaben (mit Musterlösungen) rechnen möchte, sei auf die breite Auswahl an Aufgabenbüchern verwiesen.

Die Aufgaben werden nicht notwendigerweise in der Reihenfolge des Katalogs abgearbeitet.

Inhaltsverzeichnis

1 Kontinuumsschwingungen

1.1 Wellengleichung, Ansatz von d'Alembert

1. (a) Gegeben sei eine Funktion $f(t,x) = a\cos(x+ct)$. Bestimme die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;!$$

(b) Gegeben sei eine Funktion $w(x,y) = ae^{x^2-y^2}$, mit $x = \sin y$. Berechne die folgenden Ableitungen:

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dy} \;!$$

2. (a) Bestimme die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ der Funktion

$$f(x,t) = 2t\sqrt{kx + \omega t}$$

(b) Bestimme für den Fall, daß $x = v_0 t$ ist, die Ableitung $\frac{df}{dt}$ einmal durch Einsetzen von $x = v_0 t$ in f und anschließendes Ableiten nach t und einmal durch Anwenden der Formel

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

(c) Für die Koordinaten u und v beschreibe die Funktion g_{uv} eine Feldgröße $\mathcal{G}$:

$$(u,v) \to g_{uv}(u,v) := u^2 + \pi v^3$$

Das gleiche Feld $\mathcal{G}$ wird für die Koordinaten x und y beschrieben durch die (bisher nicht bekannte) Funktion g_{xy}:

$$(x,y) \to g_{xy}(x,y) = g_{uv}\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

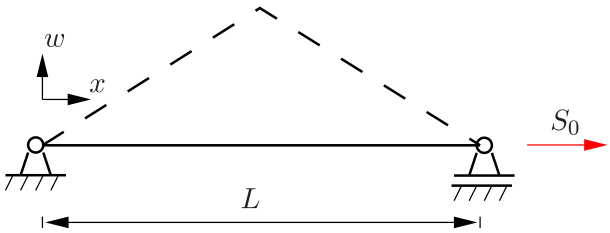
Zwischen den Koordinaten (u,v) und (x,y) gelten mit den bekannten Konstanten α und β die Transformationsbeziehungen

$$u(x,y) = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad v(x,y) = \alpha x - \beta y$$

Bestimme zuerst die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten u und v: $\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}$ und $\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}$.

Bestimme anschließend unter Verwendung von $\frac{\partial g_{uv}}{\partial u}$ und $\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}$ und mit den Komponenten der Jakobimatrix $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ die Ableitungen nach den Koordinaten x und y: $\frac{\partial g_{xy}}{\partial x}$ und $\frac{\partial g_{xy}}{\partial y}$ (in den dazu passenden Koordinaten)!

3. Betrachtet wird die beidseitig eingespannte mit der Seilkraft S_0 vorgespannte Saite (Dichte ρ, Querschnittsfläche A_0). Sie kann transversale Schwingungen ausführen. Mit dem Lösungsansatz von d'Alembert soll die Lösung zu folgenden Anfangsbedingungen bestimmt werden:



$$\dot{w}(x, t = 0) = 0$$

$$w(x, t = 0) = \begin{cases} 2\frac{x}{L}w_0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ 2\left(1 - \frac{x}{L}\right)w_0 & \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Geg.: ρ, A_0, S_0, L, w_0

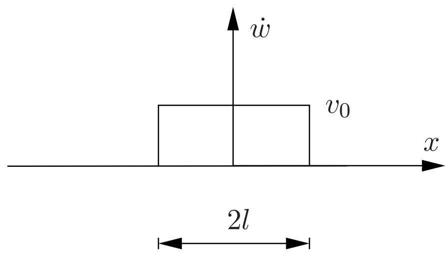
(a) Welche Gleichung beschreibt das Verhalten der Saite?

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung nach d'Alembert?

(c) Bestimme die Lösung für die gegebenen Anfangsbedingungen.

(d) Skizziere die Auslenkung der Saite für die folgenden Zeitpunkte: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{8}T$, $t_2 = \frac{1}{4}T$, $t_3 = \frac{3}{8}T$, $t_4 = \frac{1}{2}T$, $t_5 = \frac{5}{8}T$ mit $T = \frac{2L}{c}$ und $c^2 = \frac{S_0}{\rho A_0}$.

4. Betrachtet wird eine unendlich lange Saite, die transversale Schwingungen ausführen kann. Der Querschnitt der Saite sei A, die Dichte ρ. Sie ist vorgespannt mit der Seilkraft S. Mit dem Lösungsansatz von d'Alembert soll die Lösung zu folgenden Anfangsbedingungen bestimmt werden:



$$w(x, t = 0) = 0\ ,$$

$$\dot{w}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x) = \begin{cases} v_0 & \text{für } -l < x < l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Geg.: ρ, A, S, l, v_0

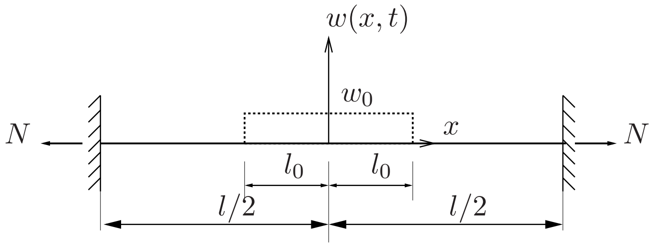
(a) Welche Gleichung beschreibt das Verhalten der Saite?

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung nach d'Alembert?

(c) Bestimme die Lösung für die gegebenen Anfangsbedingungen. *(Das Integral muß nicht aufgelöst werden.)*

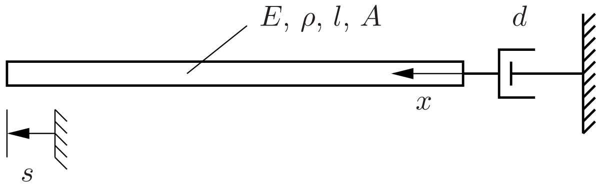
(d) Skizziere die Auslenkung der Saite im Intervall $-3 \leq \frac{x}{l} \leq 3$ für die Zeitpunkte $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \frac{1}{4}$, $\tau_2 = \frac{1}{2}$, $\tau_3 = 1$, $\tau_4 = \frac{3}{2}$ und $\tau_5 = 2$! Dabei ist $\tau = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho A}}t$.

5. Eine Saite der Länge l wird mit mit der Kraft N vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w(x, t = 0) = \begin{cases} w_0 & \text{für } -l_0 \leq x \leq l_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x, t)$ mit dem Ansatz nach D'ALEMBERT. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem.



   Geg.: N, μ, l, $c^2 = \frac{N}{\mu}$, $w(x, t = 0)$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

6. Es wird ein Stab aus linear elastischem Material untersucht, der am rechten Ende ($x = 0$) über einen viskosen Dämpfer an die Umgebung gekoppelt ist. Am linken Ende ($x = l$) wird eine Verschiebung $s\,(t)$ vorgegeben.

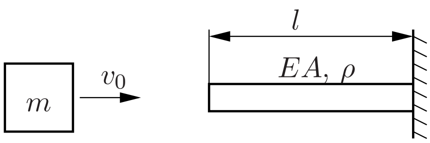


   Aufgrund der vorgegebenen Verschiebung $s\,(t)$ kommt es zur Ausbreitung von Wellen in dem Stab.

   Beginnt man mit dem Zustand der Ruhe, breiten sich anfangs Wellen nur in negative x-Richtung aus. Es soll untersucht werden, ob es eine Dämpfung d gibt, so daß eine Reflexion der Wellen am rechten Rand vollständig unterbunden werden kann.

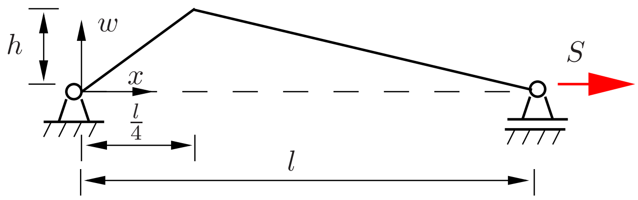
7. Eine Masse m trifft zum Zeitpunkt $t = 0$ auf das freie Ende eines einseitig fest eingespannten geraden Stabes (Länge l, Dichte ρ, Dehnsteifigkeit EA). Unmittelbar vor dem Stoß hat die Masse die Geschwindigkeit v_0 und der Stab ist unverformt und in Ruhe.

   (a) Für das Zeitintervall $0 \leq t < \frac{2l}{c}$ ist der zeitliche Verlauf der Kontaktkraft zwischen der Masse und dem Stab zu berechnen.



   (b) Kann die Masse im betrachteten Zeitintervall vom Stab abheben?

8. Eine beidseitig eingespannte Saite der Länge l (Dichte ρ, Querschnittsfläche A) ist um die Kraft S vorgespannt. Nach Einleitung der folgenden Anfangsbedingungen führt sie freie, ungedämpfte, rein transversale Schwingungen aus:



$$\dot{w}(x, t=0) = 0$$

$$w(x, t=0) = \begin{cases} 4\frac{h}{l}x & \text{für } 0 \le x < \frac{l}{4} \\ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x}{l}\right)h & \text{für } \frac{l}{4} \le x \le l \end{cases}$$

Geg.: ρ, A, S, l, h

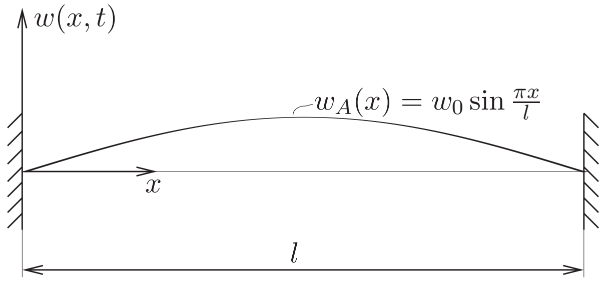
(a) Bestimmen Sie die D'ALEMBERTsche Lösung der Wellengleichung, und zeichnen Sie die Auslenkungen der Saite zu den Zeitpunkten: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{8}T$, $t_2 = \frac{1}{4}T$, $t_3 = \frac{3}{8}T$, ... über eine volle Periode T.

(b) Lösen Sie die Wellengleichung mit Hilfe des Produktansatzes von Bernoulli. Passen Sie die Lösung an die Rand- und Anfangsbedingungen an.

(c) Zeichnen Sie die ersten vier Eigenschwingungsformen und die Auslenkung der Saite aus der gewichteten Überlagerung dieser vier Eigenformen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung nach BERNOULLI die Fourierdarstellung der D'ALEMBERTschen Lösung ist.

9. Eine Saite der Länge l wird mit der Kraft S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Saite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null.



Gegeben: $S, \mu, l, c^2 = \frac{S}{\mu}$,
$w(x, t=0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$, $\quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

Bestimmen Sie die Bewegung der Saite $w(x, t)$. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:

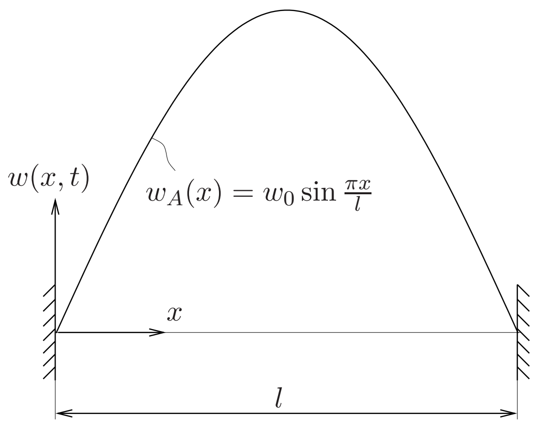
(a) Wie lautet der Ansatz nach d'Alembert?

(b) Leiten Sie den Ansatz nach der Zeit ab und setzen Sie die Anfangsbedingungen ein. Lösen Sie die beiden Gleichungen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems?

(d) Wie müssen entsprechend die Teilwellen fortgesetzt werden, damit eine Lösung den Randbedingungen genügt? Geben Sie die Gesamtlösung des Problems, also $w(x, t)$, an.

10. Eine Saite der Länge l wird mit S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ sowohl mit dem Produktansatz von Bernoulli als auch mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:



I. Ansatz nach d'Alembert:

(a) Wie lautet der Ansatz nach d'Alembert?

(b) Leiten Sie den Ansatz nach der Zeit ab und setzen Sie die Anfangsbedingungen ein. Lösen Sie die beiden Gleichungen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems? Wie müssen entsprechend die Teilwellen fortgesetzt werden, damit eine Lösung den Randbedingungen genügt?

(d) Geben Sie die Gesamtlösung des Problems, also $w(x,t)$, an.

II. Ansatz nach Bernoulli:

(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?

(b) Verwenden Sie für die weitere Berechnung den Produktansatz von Bernoulli $w(x) = X(x) \cdot T(t)$ und formen Sie die partielle Differentialgleichung derart um, daß zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen entstehen.

Für die weitere Berechnung benutzen Sie bitte die Lösungsansätze
$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$ und $T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$

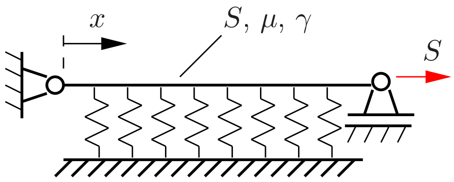
(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems?

(d) Setzen Sie den Lösungsansatz in die Randbedingungen ein und berechnen Sie die Frequenzgleichung. Bestimmen Sie die Lösung der Frequenzgleichung und damit die Eigenkreisfrequenzen.

(e) Werten Sie nun auch die Anfangsbedingungen mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen aus.

Geg.: S, μ, l, $c^2 = \frac{S}{\mu}$, $w(x, t = 0) = w_0 \sin\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

1.2 Ansatz von Bernoulli

11. 

Betrachtet wird eine Saite (Länge l, Spannkraft S und Massebelegung μ) mit elastischer Bettung. Hinweis: Die Bettungssteifigkeit γ ist die Steifigkeit der Bettung bezogen auf die Länge. Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt.

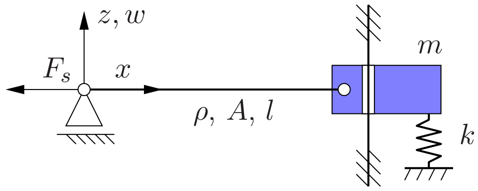
(a) Leite an einem infinitesimalen Stück der Saite die Bewegungsdifferentialgleichung für das untersuchte System her. Die transversale Auslenkung der Saite sei mit $w(x,t)$ bezeichnet.

(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Nutze einen geeigneten Separationsansatz für die Auslenkung $w(x,t)$ und überführe die hergeleitete partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(d) Gib die Randbedingungen für die Ortsfunktion an.

12. Eine Saite (Dichte ρ, Querschnittsfläche A, Länge l) ist links ($x = 0$) über ein Loslager gelagert und rechts ($x = l$) an einem vertikal geführten Körper (Masse m) befestigt. Der starre Körper wird durch eine Feder wie skizziert gestützt. Die Feder ist in der gezeichneten Lage entspannt. Die äußere Kraft F_s ist zeitlich konstant (und wirke immer genau waagerecht).



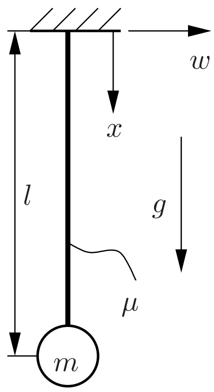
(a) Leite die Wellengleichung einer Saite an einem infinitesimalen Stück Saite her.

(b) Bestimme die Eigenwertgleichung.

(c) Zeige, dass sich für den Fall $k = \frac{-4\rho A l + \pi m}{16 \rho A l^2} \pi F_s$ die erste Eigenfrequenz $\omega_1 = \frac{\pi c}{4l}$ ergibt.

Geg.: l, m, k, F_s, ρ, A

13. Betrachtet werden die Transversalschwingungen einer Saite (Massebelegung μ). Die Saite ist am oberen Ende fest eingespannt und trägt am unteren Ende eine Punktmasse m.

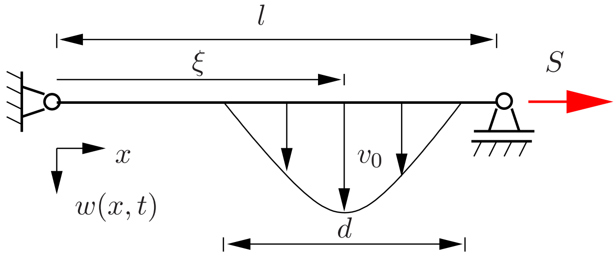


(a) Leiten Sie an einem infinitesimalen Stück der Saite die Bewegungsdifferentialgleichung für das skizzierte System her. Die transversale Auslenkung der Saite sei mit $w(x,t)$ bezeichnet. *Hinweis: Die Verschiebungen in x-Richtung werden vernachlässigt. Die Spannkraft ist über die Länge nicht konstant.*

(b) Nutzen Sie einen geeigneten Separationsansatz für die Auslenkung $w(x,t)$, und überführen Sie die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[Q - gx\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g \frac{\partial w}{\partial x}$ (Q bekannt und konstant) in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

Geg.: l, μ, m, g

14. Betrachtet wird eine eingespannte Klaviersaite der Länge l, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c. Die Saite werde an der Stelle ξ vom Hammer der Breite d getroffen. Die Saite werde dabei initial nicht ausgelenkt (AB 1) und genüge zum Anfangszeitpunkt der skizzierten Geschwindigkeitsverteilung (AB 2):



$$w(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \qquad \text{(AB 1)}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} = \begin{cases} v_0 \cos \frac{\pi(x-\xi)}{d} & \text{für } \xi - \frac{d}{2} \leq x \leq \xi + \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(AB 2)}$$

(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?

(b) Zeige mit dem Produktansatz nach Bernoulli, daß die Lösung des Randwertproblems durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin \frac{k\,\pi\,c\,t}{l} + B_k \cos \frac{k\,\pi\,c\,t}{l} \right) \sin \frac{k\,\pi\,x}{l}$$

(c) Werte nun auch die Anfangsbedingungen aus, und zeige unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen, dass die Funktion

$$w(x, t) = \frac{4\,v_0\,d}{\pi^2\,c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin \frac{k\,\pi\,\xi}{l} \cos \frac{k\,\pi\,d}{2l}}{1 - \left(\frac{kd}{l}\right)^2} \sin \frac{k\,\pi\,x}{l} \sin \frac{k\,\pi\,c\,t}{l}$$

die Lösung des gegebenen Anfangsrandwertproblems ist.

Hinweise zur Lösung:

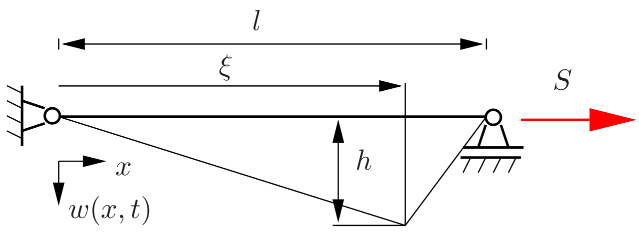
$$\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\int_{\xi-\frac{d}{2}}^{\xi+\frac{d}{2}} \cos \frac{\pi(x-\xi)}{d} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2dl^2}{\pi(l^2 - d^2k^2)} \cos \frac{k\pi d}{2l} \sin \frac{k\pi\xi}{l}$$

15. Betrachtet wird eine unter der Vorspannkraft S eingespannte Gitarrensaite der längenbezogenen Masse $\mu = \rho A$. Die Saite werde an der Stelle ξ mit der Amplitude h ausgelenkt (gezupft) und losgelassen. Die Anfangsauslenkung (AB 1) und Anfangsgeschwindigkeit (AB 2) sind gegeben:

$$w(x,t=0) = \begin{cases} \frac{hx}{\xi} & \text{für } 0 \le x < \xi \\ \frac{h(l-x)}{l-\xi} & \text{für } \xi \le x \le l \end{cases} \qquad \text{(AB 1)}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} = 0 \quad \forall\, x \qquad \text{(AB 2)}$$



Die Differentialgleichung, die das Problem beschreibt, lautet:

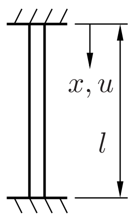
$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{mit } c^2 = \frac{S}{\mu}$$

(a) Überführe die partielle Differentialgleichung mittels Produktansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Verwende dabei die Abkürzung ω, so dass folgende Ansätze die gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen:
$T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ und $X(x) = C\cos(\frac{\omega}{c}x) + D\sin(\frac{\omega}{c}x)$

(b) Bestimme die Konstanten der Ortsfunktion $X(x)$ durch Auswertung zweier geometrischer Randbedingungen. Zeige, dass die allgemeine Lösung des Randwertproblems lautet:
$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\frac{k\pi ct}{l} + B_k \sin\frac{k\pi ct}{l})\sin\frac{k\pi x}{l}$.

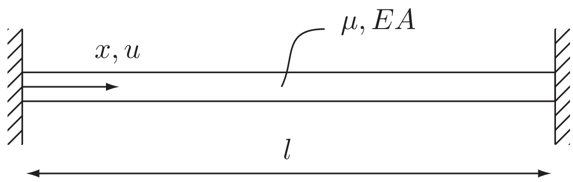
(c) Werte nun auch die Anfangsbedingungen aus, und zeige unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen, dass die Funktion
$w(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2\xi(l-\xi)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi ct}{l}$
die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems ist.

16. Für den skizzierten homogenen Dehnstab (Dichte ρ, Querschnittfläche A, Elastizitätsmodul E) ermittle man die Eigenkreisfrequenzen und die Eigenfunktionen der Longitudinalschwingungen.



Geg.: ρ, A, E, l

17. Gegeben ist ein beidseitig eingespannter Stab der Länge l, Masse pro Länge μ und Dehnsteifigkeit EA.



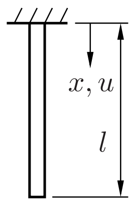
(a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen für Stablängsschwingungen an (ohne Herleitung). Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit?

(b) Bestimmen Sie über einen Produktansatz $u(x,t) = U(x)\cdot p(t)$ die Eigenkreisfrequenzen und die Eigenformen des Stabes und skizzieren Sie $U(x)$ für die ersten drei Eigenformen.

Geg.: μ, EA, l

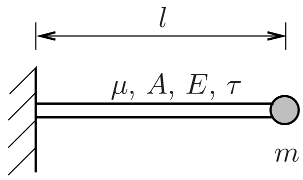
18. Für den homogenen skizzierten Dehnstab (Masse m, Querschnittfläche A, Elastizitätsmodul E) ermittle man die Eigenkreisfrequenzen und die Eigenfunktionen der Longitudinalschwingungen.

    Geg.: m, A, E, l



19. Der abgebildete Stab (Länge l, Querschnittsfläche A, Massebelegung μ) führt ausschließlich Längsschwingungen $u(x,t)$ aus. Der Stab ist aus viskoelastischem Material, das dem folgenden Materialgesetz gehorcht.

$$\sigma = E(\varepsilon + \tau\dot{\varepsilon})$$



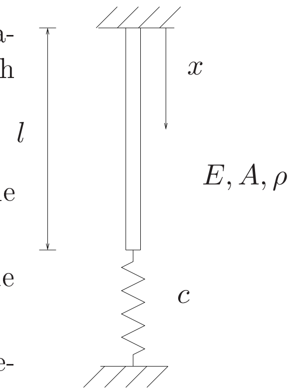
   (a) Leiten Sie an einem infinitesimalen Stück des Stabes die Bewegungsdifferentialgleichung für die Längsschwingungen $u(x,t)$ her. *Hinweis: Beachten Sie das oben angegebene Werkstoffgesetz.*

   (b) Überführen Sie die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Benutzen Sie dazu einen geeigneten Separationsansatz für die Auslenkung $u(x,t)$.

   (c) Wie lauten die Randbedingungen für das System?

   Folgende Konstanten sind gegeben: l, μ, A, m, E, τ

20. Ein mit Masse belegter Stab ist an einem Ende unverschieblich gelagert, an dem anderen mit einer Feder befestigt. Der Stab schwingt nach geeigneten Anfangsbedingungen längs.



   (a) Wie lautet die Differentialgleichung, die die Schwingung für kleine Auslenkungen beschreibt?

   (b) Forme die partielle Differentialgleichung um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

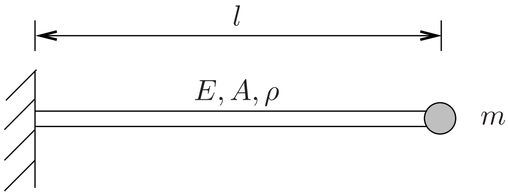
   (c) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen?

   (d) Formuliere die geometrischen und dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen.

   (e) Stelle die Frequenzgleichung auf, und löse sie grafisch.

   Gegeben seien die Größen: l, c, E, A, ρ.

21. Ein mit Masse belegter Stab ist an einem Ende unverschieblich gelagert, an dem anderen Ende ist eine Einzelmasse befestigt. Der Stab schwingt nach geeigneten Anfangsbedingungen längs.



Gegeben seien die Größen: l, m, E, A, ρ

und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit $c_L^2 = \frac{E}{\rho}$

(a) Wähle einen geeigneten Ansatz, um die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen. Begründe und diskutiere dein weiteres Vorgehen bei der Lösung.

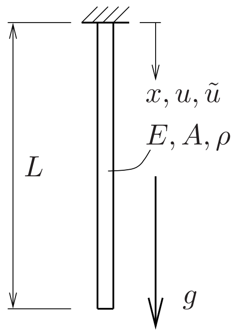
(b) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen?

(c) Formuliere die geometrischen und dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen.

(d) Stelle die Frequenzgleichung auf, und löse sie grafisch.

(e) Erläutere den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Frequenzgleichung und den Eigenformen.

22. Für den dargestellen am einen Ende eingespannten Stab im Schwerefeld (E, A, ρ gegeben) sollen die Eigenschwingungen untersucht werden. Zur Anfangszeit $t = 0$ sind Längsverschiebung und Geschwindigkeit vorgegeben als



$$u(x, t = 0) = \frac{g}{c^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + Lx\right) + u_0 \sin\frac{\pi x}{2L}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{x,t=0} = 0$$

(a) Leiten Sie die beschreibende Differentialgleichung her. Nehmen sie dabei an, dass $A = A(x) \neq const.$ gilt.

(b) Vereinfachen Sie die gewonnene Differentialgleichung für den Fall, dass $A = const.$ ist und geben Sie die Randbedingungen für u an.

(c) Bestimmen Sie die statische Ruhelage u_{stat}, d.h. diejenige Längsverschiebung, die sich einstellen würde, wenn das System in Ruhe wäre.

(d) Wie lautet die Differentialgleichung für $\tilde{u}$, und wie lauten die Randbedingungen für $\tilde{u}$, wenn man $\tilde{u} = u - u_{\text{stat}}$ definiert?

(e) Ein Produktansatz liefert nach Einsetzen die allgemeine Lösung

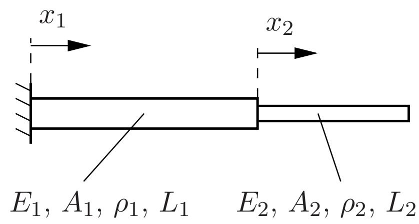
$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{\omega_k}{c}x + B_k \sin\frac{\omega_k}{c}x\right)(C_k \cos\omega_k t + D_k \sin\omega_k t)$$

Bestimmen Sie die unendlich vielen Eigenfrequenzen ω_k mithilfe der Randbedingungen für $\tilde{u}$ (Tipp: Bestimmen heißt Bestimmen und nicht Ausschreiben).

(f) Zur weiteren Anpassung (und zur Lösung des Anfangs-Randwertproblems) betrachten Sie nun die modifizierten Anfangsbedingungen: Wie groß ist $\tilde{u}(x, t = 0)$? Und wie groß ist $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}|_{x,t=0}$? Bestimmen Sie die $\tilde{u}(x, t)$ durch Anpassen an die Anfangsbedingungen.

Geg.: $E,\ A,\ \rho,\ L,\ g$

23. Zwei Stäbe (Längen L_1, L_2 Querschnittsflächen A_1, A_2, E-Moduln E_1, E_2 und Dichten ρ_1, ρ_2) sind wie skizziert miteinander verbunden und links fest eingespannt. Das System schwingt ausschließlich in Längsrichtung.



(a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichungen sowie die Rand- und Übergangsbedingungen für die Stablängsschwingungen? Benutze die eingezeichneten Koordinaten x_1 und x_2. Hinweis: Beachte, daß die Stäbe unterschiedliche Dehnsteifigkeiten haben.

(b) Löse die partiellen Differentialgleichungen jeweils mit einem Separationsansatz und formuliere das Eigenwertproblem. Hinweis: Eine Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist nicht notwendig.

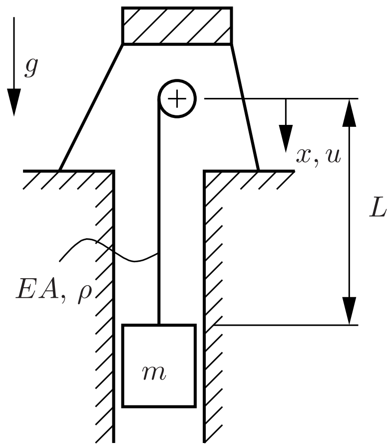
(c) Wie lautet die Frequenzgleichung? Hinweis: Die Frequenzgleichung braucht nicht gelöst zu werden.

(d) Zeige, daß man bei Aneinanderkopplung zweier identischer Stäbe auf das bekannte Ergebnis

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2L}$$

kommt, wobei $L = L_1 + L_2$ und c die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist.

24. Es soll das Eigenschwingverhalten des Systems Förderkorb/Seil einer Schachtanlage untersucht werden. Seil und Förderkorb schwingen in guter Näherung nur in vertikaler Richtung.



(a) Stelle das zweite NEWTONsche Gesetz für ein infinitesimales Seilstück auf. Die lokale Verschiebung des Seils in x-Richtung sei $u(x,t)$. Leite dann mit dem Hookeschen Materialgesetz $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ die Bewegungsdifferentialgleichung für das dargestellte System her.

(b) Gib die Randbedingungen für das System an! (*Hinweis: Endmasse freischneiden.*)

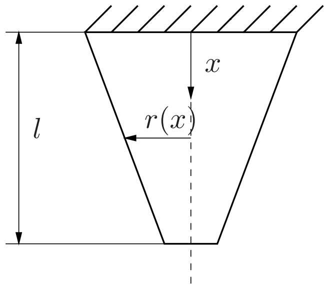
(c) Bestimme die statische Ruhelage $u_0(x)$ des Systems!

(d) Wie lauten die Differentialgleichung und die Randbedingungen mit der neuen Variablen $\tilde{u} = u - u_0$?

(e) Wie groß ist die erste Eigenfrequenz des Systems, wenn der Förderkorb in Schwingung gerät? Verwende die Gleichungen aus Teil (d)!

Geg.: L, E, A, ρ, m, g

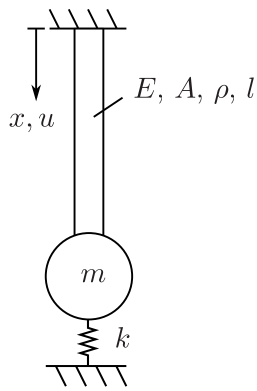
25. Im folgenden sollen die Längsschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes untersucht werden. Die Querschnitte sind kreisförmig, der Radius r verläuft linear. Es seien linear-elastisches Material, ein eindimensionaler Spannungszustand, über die Stablänge l konstante Dichte ρ und E-Modul E vorausgesetzt. Für die Radien $r_0 = r(x = 0)$ und $r_1 = r(x = l)$ gelte die Beziehung $r_1 = \frac{2}{3}r_0$. Zudem gilt $r \ll l$.



   (a) Leiten Sie die (partielle) Bewegungsdifferentialgleichung her!
   (b) Bestimmen Sie daraus mit einem geeigneten Ansatz die (gewöhnliche) Differentialgleichung für die Amplitudenfunktion und geben Sie die dazugehörigen Randbedingungen an!
   (c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen mit einem Produktansatz.
   (d) Bestimmen Sie die erste Eigenfrequenz näherungsweise mit dem Verfahren von Ritz.

26. Ein schwingungsfähiges System wird wie skizziert als massebehafteter, nur längschwingender Dehnstab modelliert und das dazugehörige Fundament als einfaches Feder-Masse-Element. Es sollen die Eigenschwingungen des skizzierten Systems um die spannungsfreie Ausgangslage untersucht werden.

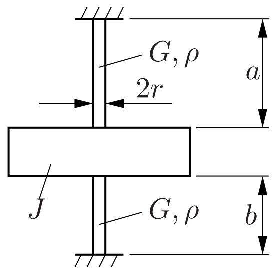
   (a) Geben Sie für das System die Differentialgleichung für die Verschiebung $u(x, t)$ an.
   (b) Leiten Sie mit Hilfe eines geeigenten Separationsansatzes die gewöhnliche Differentialgleichung im Ort her und geben Sie deren allgemeine Lösung an.
   (c) Formulieren Sie die Randbedingungen.
   (d) Geben Sie eine Bestimmungsgleichung für die Eigenfrequenzen des Systems an. Diese Gleichung soll <u>nicht</u> gelöst werden!



   Geg.: ρ, E, A, L, m, k (kein Erdschwerefeld)

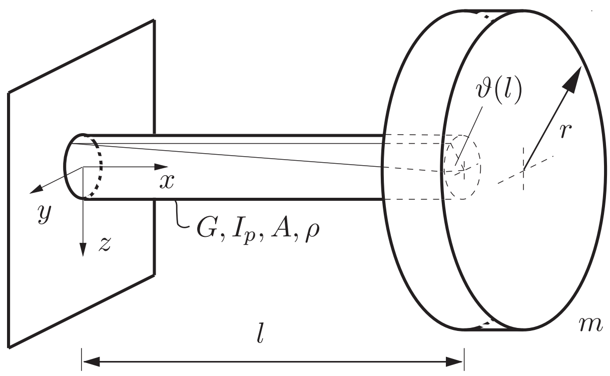
27. Ein kreiszylindrischer Draht mit dem Radius r und der Dichte ρ sei wie skizziert eingespannt und mit einer Scheibe mit dem Massenträgheitsmoment J verbunden. Ermitteln Sie die Frequenzgleichung.

   Geg.: G, ρ, J, a, b, r.



28. Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Stab um seine Längsachse schwingen.

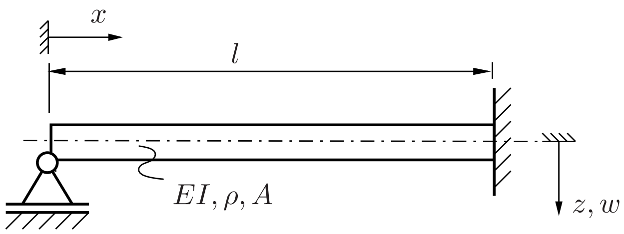
    Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r



   (a) Geben Sie die Differentialgleichung für die freie Torsionsschwingung an (Herleitung nicht erforderlich) und formen Sie diese in 2 gewöhnliche Differentialgleichungen um.
   (b) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen? Wie lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung?
   (c) Formulieren Sie die geometrischen und die dynamischen Randbedingungen.
   (d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und skizzieren Sie, wie sich die ersten Eigenkreisfrequenzen grafisch bestimmen lassen.

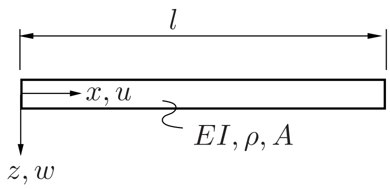
29. Der skizzierte massebehaftete Balken wird durch geeignete Anfangsbedingungen in freie Biegeschwingungen versetzt.

    Gegeben: A, EI, ρ, l



   (a) Wie lautet die das System beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*
   (b) Formen Sie diese partielle Differentialgleichung mit einem Produktansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen um und geben Sie deren Lösungen an.
   (c) Formulieren Sie die geometrischen und physikalischen Randbedingungen.
   (d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und geben Sie Näherungslösungen an.

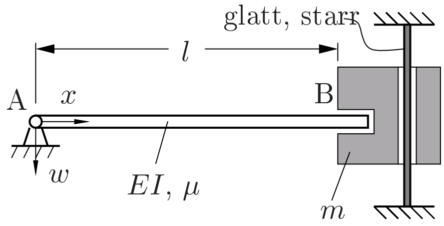
30. Der skizzierte massebehaftete Balken wird durch geeignete Anfangsbedingungen in freie Transversalschwingungen versetzt.



   (a) Wie lautet die das System beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*
   (b) Formen Sie diese partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche um und geben Sie deren Lösungen an.
   (c) Formulieren Sie die geometrischen und dynamischen Randbedingungen.
   (d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und geben sie näherungsweise die erste von Null verschiedene Eigenkreisfrequenz an.

   Geg.: A, EI, ρ, l

31. Ein Balken (Länge l, Massebelegung μ, Biegesteifigkeit EI) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.

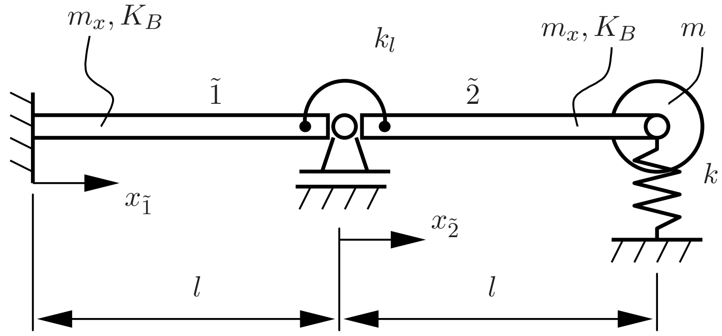


   (a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichung und die zugehörigen Randbedingungen? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

   (b) Wie lautet die Frequenzgleichung? *Hinweis: Die Frequenzgleichung braucht nicht gelöst zu werden.*

   Geg.: EI, μ, l, m

32. Das skizzierte System zweier mit einer Drehfeder gekoppelter längshomogener schubstarrer Balken (Massenbelag m_x, Biegesteifigkeit K_B) soll hinsichtlich seines transversalen Eigenschwingungsverhaltens untersucht werden. Verwenden Sie bitte den **Bernoulli- bzw. Produktansatz**!



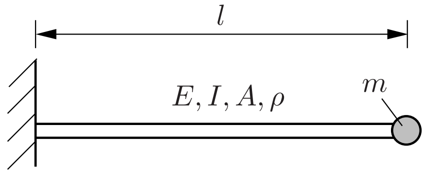
   (a) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an!

   (b) Formulieren Sie die Bedingungen an die Ortsfunktion $X_\alpha(x_\alpha)$ $(\alpha = \tilde{1}, \tilde{2})$ für die unter (a) ermittelten Beziehungen!

   (c) Stellen Sie das Gesamtgleichungssystem für die Konstanten C_i $(i = 1 \dots 8)$ auf.

   Geg.: m, m_x, K_B, k, k_l, l Die Federn sind in der skizzierten Lage spannungslos.

33. Ein einseitig eingespannter, massebehafteter Balken trägt am freien Ende eine Einzelmasse. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Balken quer schwingen.



   Gegeben seien die Größen: l, m, E, I, A, ρ

   (a) Zeige an einem differentiellen Massenelement, dass gilt: $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_Q^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$!

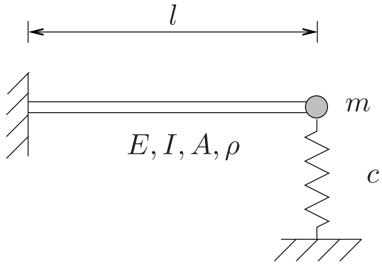
   (b) Forme die partielle Differentialgleichung um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

   (c) Bestimme die allgemeine Lösung mit einem für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen allgemeingültigen Ansatz der Form $X(x) = Ae^{\lambda x}$!

   (d) Formuliere die geometrischen und dynamischen Randbedingungen.

   (e) Stelle die Frequenzgleichung auf!

34. Ein einseitig eingespannter, massebehafteter Balken trägt am freien Ende eine Einzelmasse und ist dort mit einer Feder abgestützt. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Balken quer schwingen.



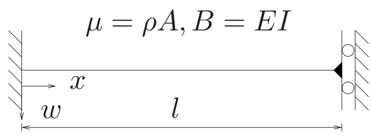
(a) Forme die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_Q^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen!

(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Ortsfunktion mit einem Exponentialansatz!

(c) Formuliere die geometrischen und dynamischen Randbedingungen!

(d) Stelle die Frequenzgleichung auf, und gib eine Bestimmungsgleichung für die Eigenformen an!

Gegeben seien die Größen: l, m, c, E, I, A, ρ



35. Ein Balken sei links fest eingespannt und rechts durch ein Lager mit der Wand verbunden, das zwar Biegemomente, aber keine Querkräfte übertragen kann. Die zugeordnete Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}$ wird mit $\lambda = \sqrt{\frac{\Omega}{c}}$, $c^2 = \frac{B}{\mu}$ von folgendem Ansatz erfüllt:
$w(x,t) = \Big(B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + B_3 \cos(\lambda x) + B_4 \sin(\lambda x)\Big)\Big(A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t)\Big)$.
Bei der Lösung der folgenden Aufgaben ist folgende Kurzschreibweise nützlich:
$\cosh(.) = \mathrm{ch}_{(.)}$ $\sinh(.) = \mathrm{sh}_{(.)}$ $\cos(.) = \mathrm{c}_{(.)}$ $\sin(.) = \mathrm{s}_{(.)}$ $\tan(.) = \mathrm{t}_{(.)}$ $\tanh(.) = \mathrm{th}_{(.)}$.

(a) Geben Sie 2 Bedingungen an, die am linken Rand zu jeder Zeit erfüllt sind. Welcher Zusammenhang gilt zwischen B_1 und B_3? Welcher Zusammenhang gilt zwischen B_2 und B_4?

(b) Geben Sie nun 2 Bedingungen (Gleichungen) an, die am rechten Rand zu jeder Zeit erfüllt sind. Ersetzen Sie darin B_3 und B_4 durch B_1 und B_2. Berechnen Sie die Summe und die Differenz der beiden Gleichungen. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte folgender Gleichung genügen: $\tan(\lambda l) + \tanh(\lambda l) = 0$.

(c) Die Lösung des Randwertproblems (RWP) lautet in mit den oben erklärten Kurzschreibweise:

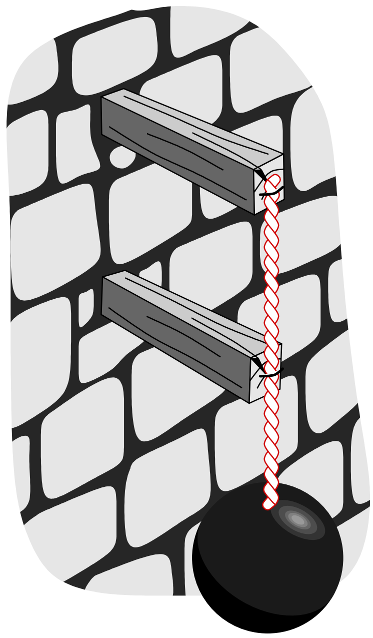
$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(B_{1_k} \mathrm{ch}_{\lambda_k x} + B_{2_k} \mathrm{sh}_{\lambda_k x} + B_{3_k} \mathrm{c}_{\lambda_k x} + B_{4_k} \mathrm{s}_{\lambda_k x}\right)\left(A_{1_k} \mathrm{c}_{\Omega_k t} + A_{2_k} \mathrm{s}_{\Omega_k t}\right)\right\}$$

Wählen Sie $B_{1_k} = \alpha$ (für alle k), und bestimmen Sie damit B_{2_k}, B_{3_k} und B_{4_k} abhängig von α und $\lambda_k l$. Bestimmen Sie nun die Eigenformen $E_k(\lambda_k l, x)$ so, dass die Lösung des RWP geschrieben werden kann als:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ E_k(\lambda_k l, x)\Big(\alpha A_{1_k} \cos(\Omega_k t) + \alpha A_{2_k} \sin(\Omega_k t)\Big)\right\}$$

36. Es sollen die Eigenfrequenzen des skizzierten Systems bestimmt werden. Dabei sollen nur Schwingungsformen in der zwischen den Balken aufgespannten senkrechten Ebene berücksichtigt werden. Sowohl die Balken als auch das Seil sollen als massebehaftet und elastisch angesehen werden.

    Gib die anzuwendenden Bewegungsdifferentialgleichungen sowie die zugehörigen Rand- und Übergangsbedinungen an!



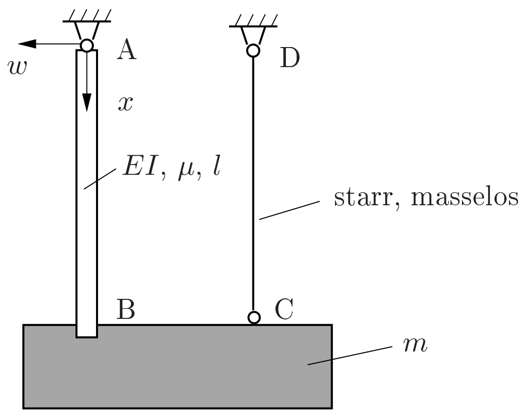
37. Ein Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) ist bei A gelenkig gelagert und bei B mit einem starren Körper (Masse m) verbunden. Eine starre, masselose Pendelstütze DC (Länge l) hält die Masse waagerecht.

    (a) Gib die partielle Differentialgleichung und die Randbedingungen für kleine Biegeschwingungen $w(x,t)$ des Balkens an.

    (b) Stelle die Frequenzgleichung für das Systems auf.

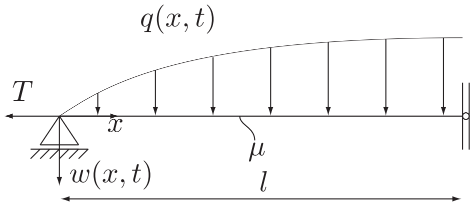
    (c) Bestimme numerisch die erste Eigenfrequenz für den Fall, das der starre Körper gerade 10 mal schwerer ist als der Balken.

    Geg.: l, EI, μ, m



1.3 Erzwungene Schwingungen

38. Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Massenbelegung μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right) \cos \Omega t$ angeregt wird.



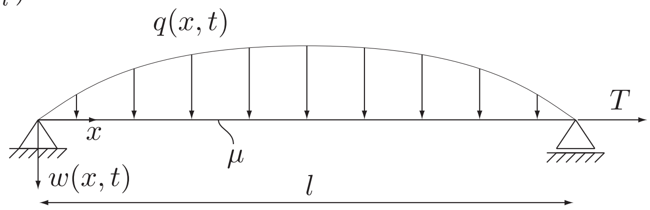
(a) Geben Sie die Wellengleichung und alle Randbedingungen an.

(b) Überführen Sie durch einen geeigneten Ansatz vom Typ der rechten Seite für $w(x,t)$ die Wellengleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Zeigen Sie, dass die Lösung der Ortsdifferentialgleichung die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

Geg.: T, $\mu = \rho A$, l, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right) \cos \Omega t$

39. Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Massenbelegung μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(\frac{\pi}{l}x) \cos(\Omega t)$ angeregt wird. Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w(x,t) = W(x) \cos \Omega t$ zu bestimmen.



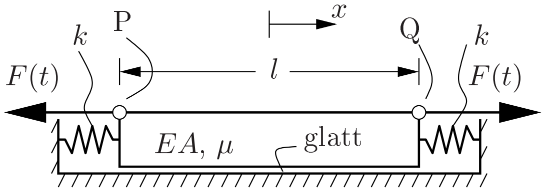
(a) Geben Sie die Wellengleichung und alle Randbedingungen an.

(b) Bestimmen Sie $W(x)$ indem Sie den Ansatz für $w(x,t)$ in die Wellengleichung einsetzen und für $W(x)$ einen Ansatz vom Typ der rechten Seite aufstellen. Bilden Sie $w(x,t)$ und zeigen Sie, dass die Lösung die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

Geg.: T, μ, l, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x \cos(\Omega t)\right)$

40. Ein Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung $\mu = \rho A$, Länge l) stützt sich an seinen beiden Enden ($x = -\frac{l}{2}$ und $x = \frac{l}{2}$) über Federn (Federsteifigkeit k) an der Umgebung ab. In der Ruhelage sind die Federn entspannt. An den Punkten P und Q greifen entgegengesetzt wirkende Kräfte mit dem Betrag $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an. Die Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes im eingeschwungenen Zustand sind zu untersuchen.



   (a) Wie lautet die die Längsschwingungen beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

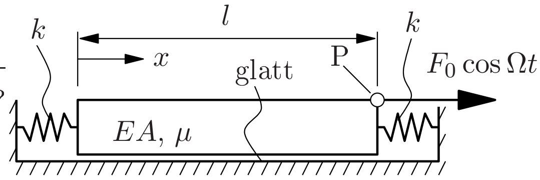
   (b) Wie lauten die Randbedingungen? *Beachten Sie bitte den Ursprung der Koordinate x!*

   (c) Bestimmen Sie nun die Lösung $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

   (d) Für welche Erregerkreisfrequenzen Ω bewegt sich der Punkt Q nicht?

   Geg.: F_0, Ω, EA, μ, l

41. Ein Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) stützt sich an seinen beiden Enden ($x = 0$ und $x = l$) über Federn (Federsteifigkeit k) an der Umgebung ab. In der Ruhelage sind die Federn entspannt. Am Punkt P greift eine Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an. Die Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes im eingeschwungenen Zustand sind in den folgenden Schritten zu untersuchen.



   (a) Wie lautet die die Längsschwingungen beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

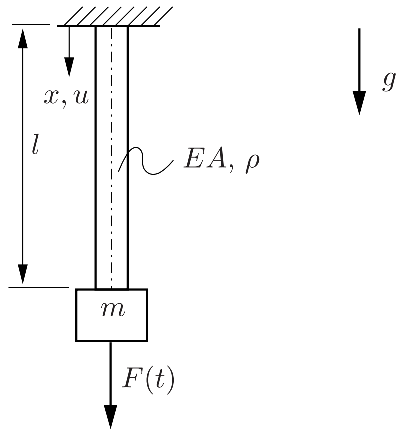
   (b) Wie lauten die Randbedingungen?

   (c) Bestimmen Sie nun die Lösung $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

   (d) Für welche Erregerfrequenzen Ω bewegt sich der Punkt P nicht? Setzen Sie hier große Erregerfrequenzen Ω voraus und geben Sie Näherungslösungen an.

   Geg.: F_0, Ω, EA, μ, l

42. Ein einseitig eingespannter massebehafteter Stab (Dehnsteifigkeit EA, Dichte ρ, Länge l) im Schwerefeld trägt an seinem Ende eine Einzelmasse m. An dieser greift eine harmonische Erregerkraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an, die den Stab in erzwungene Longitudinalschwingungen versetzt.



(a) Leite die das System beschreibende partielle Differentialgleichung durch Freischnitt eines infinitesimalen Massenelementes her.

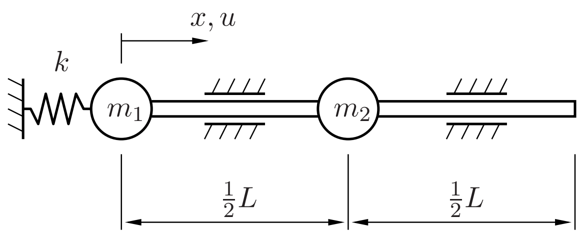
(b) Durch eine Transformation auf die statische Ruhelage läßt sich die Differentialgleichung auf die folgende bekannte Form überführen:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x,t) = c_l^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{mit} \quad c_l^2 = \frac{E}{\rho}$$

Ausgehend von dieser homogenen partiellen Differentialgleichung sollen die Längsschwingungen $\tilde{u}_p(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmt werden.

Geg.: F_0, Ω, E,A, ρ, l, m, g

43. Ein schwingungsfähiges System wird durch das skizzierte Modell aus zwei Dehnstäben (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelag ρA) mit Massenpunkten (Masse m_1, m_2) und einer idealen Feder (Steifigkeit k) beschrieben.



Geg.: L, k, m_1, m_2, E, ρ, A

(a) Geben Sie die Bewegungsgleichung(en) des skizzierten Systems und die dazugehörigen Rand- und Übergangsbedingungen an.

Im folgenden wird ein Spezialfall betrachtet, der auf folgende Bewegungsdifferentialgleichung und Randbedingungen führt:

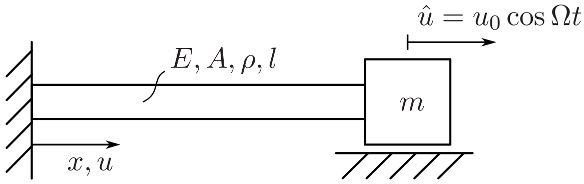
$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t)\ , \quad u(x=0,t) = 0\ , \quad u'(x=L,t) = 0$$

(b) Was für ein Spezialfall ist das? Welchen Werten müssen die Massen der zwei Massenpunkte für diesen Spezialfall zustreben? (Der Wert für k soll hierbei nicht eingegrenzt werden.) Geben Sie c in gegebenen Größen an!

(c) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen für den Spezialfall.

(d) Das System (Spezialfall) soll am rechten Ende ($x = L$) mit einer Kraft angeregt werden. Die Amplitude der Kraft beträgt $\hat{F}$, die Schwingungsperiode T. Berechnen Sie die Schwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

44. Der skizzierte Stab (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Dichte ρ und Länge l) mit Einzel-Endmasse m wird durch eine vorgegebene Verschiebung $\hat{u}$ des freien Endes zu Longitudinalschwingungen angeregt.



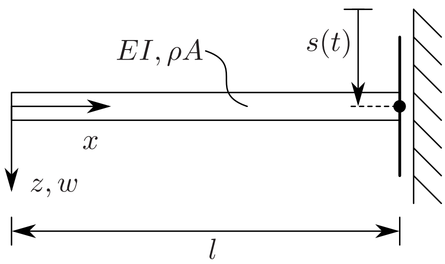
(a) Wie lautet die Bewegungsdifferentialgleichung und wie die Randbedingungen des Sytems?

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung für die Verschiebung $u(x, t)$ an.

(c) Passen Sie die allgemeine Lösung an die Randbedingungen an und bestimmen Sie die Lösung im eingeschwungenen Zustand.

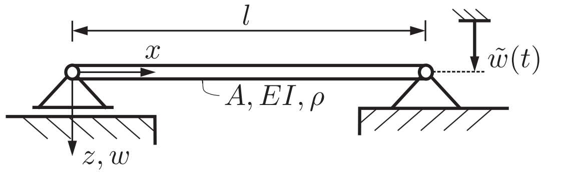
Geg.: ρ, E, A, l, $\hat{u} = u_0 \cos \Omega t$

45. Ein einseitig eingespannter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) werde dadurch in erzwungene Schwingungen versetzt, dass die Einspannung eine harmonische Auf- und Abbewegung mit der Frequenz Ω durchführt. Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x, t)$ im eingeschwungenen Zustand.



Geg.: l, $EI =$ konst. in x, $\mu =$ konst. in x, $s(t) = s_0 \cos(\Omega t)$, Ω, s_0

46. Der skizzierte massebehaftete Balken wird durch eine periodische Auslenkung $\tilde{w}(t)$ des rechten Lagers in Biegeschwingungen versetzt. Die Schwerkraft wird dabei vernachlässigt.
Geg.: $A, EI, \rho, l, \tilde{w}(t) = w_0 \sin \Omega t$



(a) Zeigen Sie an einem infinitesimal kleinen Stück des Balkens, dass die Biegeschwingung für den Euler-Bernoulli-Balken durch die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + {c_B}^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstante c_B.

(b) Formen Sie die Differentialgleichung mit einem Bernoulli-Ansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen um und geben Sie deren allgemeine Lösungen an.

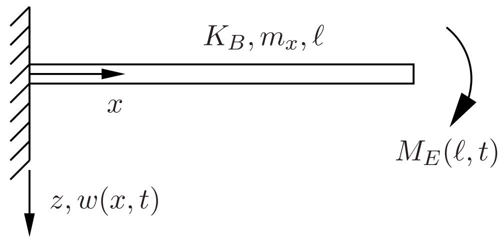
(c) Formulieren Sie die geometrischen und die dynamischen Randbedingungen.

(d) Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x, t)$ im eingeschwungenen Zustand.

(e) Ermitteln Sie die Kreisfrequenzen Ω_R, bei denen Resonanz auftritt.

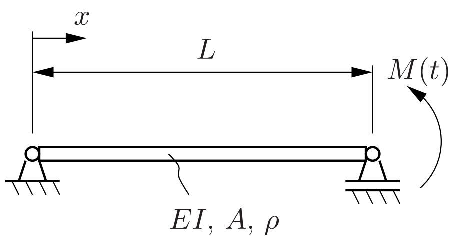
Hinweis: Der Hyperbelsinus ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend und hat eine Nullstelle bei Null.

47. Ein Kragbalken wird wie abgebildet durch ein Moment am rechten Rand belastet. Man berechne die Übertragungsfunktion des Systems an der Stelle, wo das Moment angreift.
Eingangsgröße: $M_E(x = \ell, t) = M_0 \cos(\Omega t)$, Ausgangsgröße: $w'(x = \ell, t)$



Geg.: K_B, m_x, ℓ, M_0

48. Ein Balken ist links und rechts gelenkig gelagert, am rechten Ende ($x = L$) greift ein periodisches Moment an: $M(t) = M_0 \cos \Omega t$.

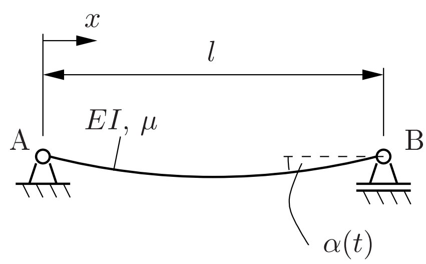


(a) Gib die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung und die dazugehörigen Randbedingungen an!

(b) Bestimme die Schwingungsform im eingeschwungenen Zustand!

Geg.: M_0, Ω, L, EI, A, ρ

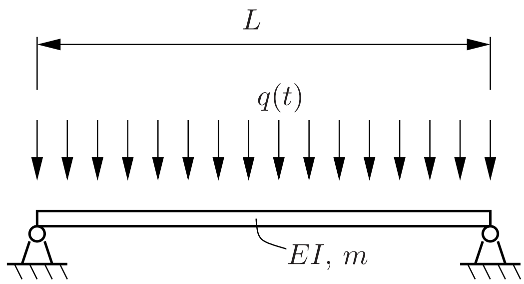
49. Ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) werde dadurch in erzwungene Schwingungen versetzt, dass am rechten Lager eine harmonische Drehbewegung mit der Frequenz Ω vorgegeben ist. Geben Sie die Durchbiegung $w(x, t)$ im eingeschwungenen Zustand an.



Geg.: l, EI, μ, $\alpha(t) = \hat{\alpha} \sin \Omega t$, Ω, $\hat{\alpha}$

50. Eine Kompanie Soldaten marschiert im Gleichschritt über eine freitragende Brücke.

Es wird nur die Abweichung von der statischen Ruhelage betrachtet. Das Problem wird als ein Balken unter räumlich konstanter und zeitlich periodischer Streckenlast betrachtet.



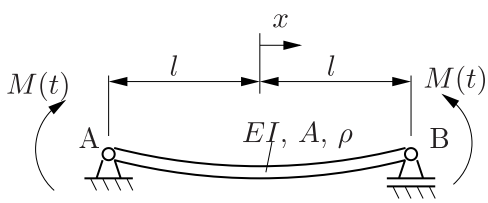
Geg.: L, EI, m, $q(t) = q_0 \sin \Omega t$

(a) Gib die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung an!

(b) Bestimme die Schwingungsform im eingeschwungenen Zustand!

(c) Bestimme die Amplitude der Brückenschwingung in Abhängigkeit von der Schrittfrequenz im eingeschwungenen Zustand!

51. Ein elastischer, massebehafteter Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge $2l$, Querschnittsfläche A und Dichte ρ) ist links und rechts gelenkig gelagert. An beiden Enden greift ein periodisches Moment $M(t) = M_0 \cos \Omega t$ an. Unter Vernachlässigung der Dämpfung soll die Amplitude im stationären, eingeschwungenen Zustand bestimmt werden.



Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Geben Sie die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung an.

(b) Wie lauten die Randbedingungen? Beachten Sie die eingezeichnete x-Koordinate.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung mit einem Ansatz vom **Typ der rechten Seite.** Wie lautet die Differentialgleichung für die Ortsfunktion und deren allgemeine Lösung?

(d) Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung im eingeschwungenen Zustand.

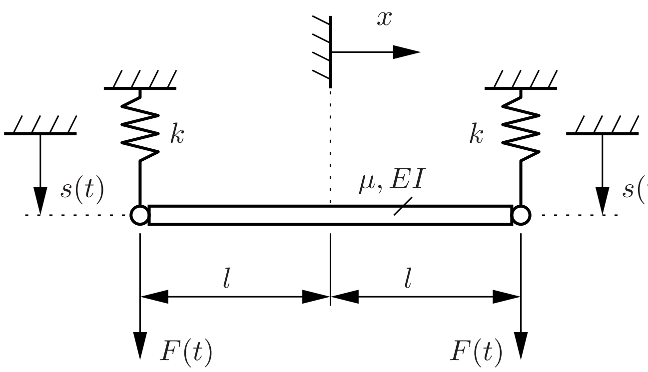
(e) Gibt es eine Phasenverschiebung zwischen Fremderregung und Systemantwort? Begründen Sie Ihre Antwort.

Geg.: M_0, Ω, l, EI, A, ρ

52. Ein Balken (Länge $2l$, Massebelegung μ, Biegesteifigkeit EI) ist an beiden Enden an Federn (Steifigkeit k) aufgehängt. An den Endpunkten werden die Bewegungen $s(t) = \hat{s} \cos \Omega t$ durch geeignete Kräfte $F(t)$ erzwungen.

(a) Gib die partielle Differentialgleichung und die Randbedingungen für kleine Biegeschwingungen $w(x,t)$ des Balkens an.

(b) Bestimme die Balkenschwingungen $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.



Geg.: μ, EI, l, k, $\hat{s}$, Ω

2 Grundlagen der Hydromechanik

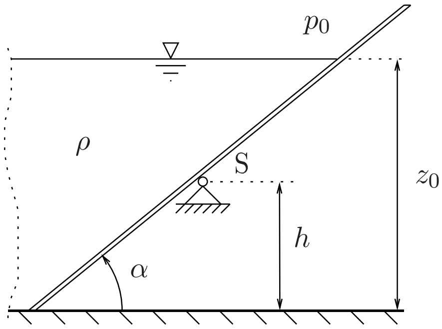
2.1 Hydrostatik

53. Ein Wasserlauf wird durch ein schräg liegendes Klappenwehr begrenzt. Die Wehrklappe ist in ihrem Schwerpunkt S drehbar gelagert. Die Breite der Wehrklappe (senkrecht zur Bildebene) ist b. Bei einem bestimmten Wasserstand klappt das Wehr selbständig auf.

    (a) Berechnen Sie die resultierende Kraft auf die Wehrklappe und das Moment bezüglich der Wehrachse infolge des Wasserdruckes!

    (b) Berechnen Sie den Wasserstand z_0, bei dem das Wehr selbständig öffnet!

    (c) Berechnen Sie das maximale Moment, das erforderlich ist, um das Wehr zu öffnen!

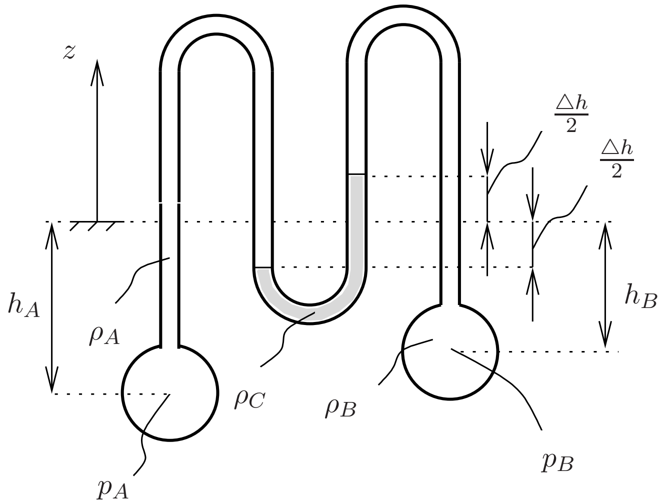


    Geg.: ρ, h, α, p_0, g

54. Zwei mit (inkompressiblen) Flüssigkeiten der Dichten ρ_A bzw. ρ_B gefüllte Behälter sind in der skizzierten Weise über ein U-Rohr-Manometer verbunden. Die Dichte der Manometerflüssigkeit ist ρ_C.

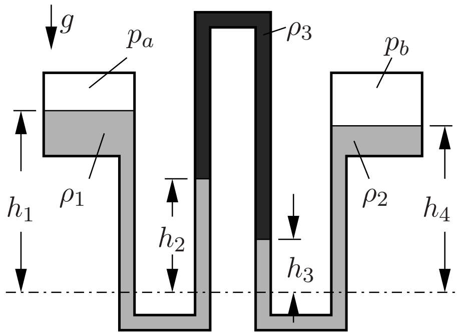
    Wie groß ist die Druckdifferenz $p_A - p_B$ in Abhängigkeit vom Manometerausschlag $\triangle h$?

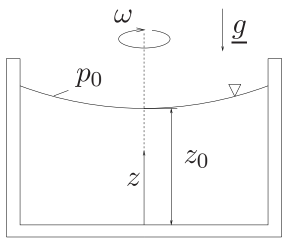
    Geg.: h_A, h_B, $\triangle h$, ρ_A, ρ_B, ρ_C



55. Zwei Flüssigkeitsbehälter sind nach nebenstehender Skizze durch ein Rohrsystem miteinander verbunden. Über der Flüssigkeit in beiden Behältern befindet sich Luft. In den Behältern und dem Rohrsystem befinden sich drei verschiedene Flüssigkeiten mit den Dichten ρ_1, ρ_2 und ρ_3. Die Druckdifferenz zwischen den beiden Behältern beträgt $p_a - p_b = \Delta p$. Wie groß ist die Dichte ρ_3 der dritten Flüssigkeit?

    Geg.: Δp, h_1, h_2, h_3, h_4, ρ_1, ρ_2, g



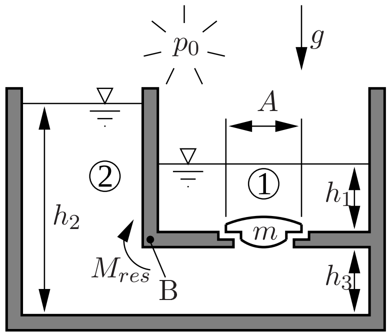


56. Ein Becher sei mit einem reibungsfreien, inkompressiblen Fluid ($\rho = const$) gefüllt und rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω im Schwerefeld der Erde. In einer mitgewegten Basis gilt das EULERsche Grundgesetz der Hydrostatik in bekannten Form (ohne Beweis).

   (a) Berechnen Sie mit der Vorgabe $\underline{f} = \omega^2 r \underline{e}_r - g\underline{e}_z$ ein Potential U in Zylinderkoordinaten, aus dem sich $\underline{f}$ berechnen läßt aus $\underline{f} = -gradU$. Hinweis: Der Gradient von U hat in der mitbewegten Basis $< \underline{e}_r\, \underline{e}_\varphi\, \underline{e}_z >$ die (physikalischen) Komponenten $[\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z}]$.

   (b) Setzen Sie $\underline{f} = -gradU$ in das EULERsche Grundgesetz der Hydrostatik ein. Was können Sie über $U + \frac{p}{\rho}$ sagen? Stellen Sie p als Funktion von z, r mit den Parametern p_0, z_0 dar.

   (c) Welche Form nimmt die Oberfläche der Flüssigkeit an?



57. Eine senkrechte Trennwand der Breite b, die ein Wasserreservoir der Wassertiefe h_2 gegen ein anderes der Tiefe h_1 abschließt, soll vor Überlastung geschützt werden. Bei Überschreiten einer bestimmten Wassertiefe h_2 soll der Ventilkörper der Masse m abheben, damit das Wasser vom Behälter 2 in den Behälter 1 fließen kann.

   (a) Ab welchem Wasserstand $h_{2,\text{krit}}$ überschreitet das resultierende Moment M_{res} um den Punkt B den kritischen Wert $M_{\text{krit}} = 9{,}81 \cdot 10^6\text{Nm}$?

   (b) Wie groß muß die Ventilfläche A sein, damit das Ventil bei Erreichen des Wasserstandes $h_{2,\text{krit}}$ öffnet?

   Geg.: $h_1 = h_3 = 1\text{m}$, $p_0 = 1\text{bar}$, $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $m = 1000\text{kg}$, $M_{\text{krit}} = 9{,}81 \cdot 10^6\text{Nm}$, $b = 2\text{m}$

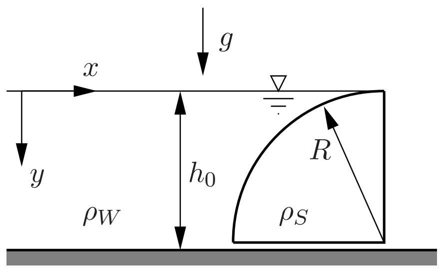
58. Eine transportable Hochwassersperre sei viertelzylinderförmig mit dem Radius R und der Breite b senkrecht zur Zeichenebene ausgeführt. Sie besteht aus homogenem Material der Dichte $\rho_S = 3 \cdot \rho_W$. Die Sperre liegt lose auf dem Grund. Es sei angenommen, daß zwischen Sperre und Grund kein Wasser eindringt und daß dort der Haftreibungskoeffizient μ_0 wirksam ist. Es soll der höchste Wasserstand $h_0 = R$ betrachtet werden.

   (a) Wie groß ist die Horizontalkraft F_x des Wassers auf die Sperre?

   (b) Wie groß ist die Vertikalkraft F_y des Wassers auf die Sperre?

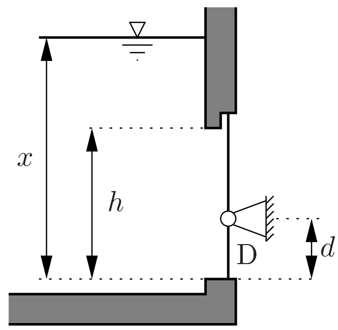
   (c) Wie groß muss der Haftungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit die Sperre nicht wegrutscht?

   (d) Wie verläuft die Wirkungslinie der resultierenden Wasserlast? Gib einen Punkt und die Neigung an.



   Geg.: ρ_W, R, b, g

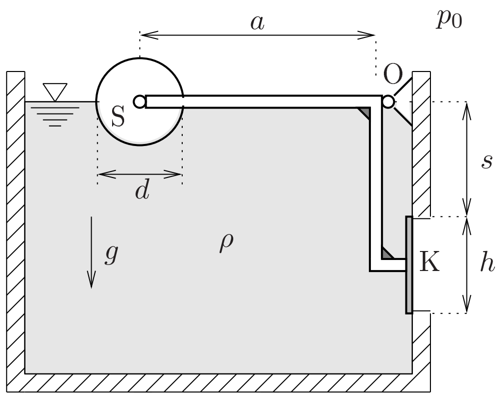
59. Eine in einem Wasserbehälter eingebaute Klappe der Höhe h und der Breite b ist im Punkt D um eine horizontale Achse drehbar gelagert.



   (a) Wie groß ist die resultierende Wasserlast F auf die Klappe in Abhängigkeit von der Höhe x des Wasserspiegels?
   (b) Bei welcher Höhe x des Wasserspiegels öffnet sich die Klappe durch die Wasserlast selbsttätig? Stellen Sie Ihr Ergebnis in einem Diagramm dar.
   (c) Berechnen Sie nun mit den gegebenen Zahlenwerten, bei welcher Wasserhöhe sich die Klappe öffnet.

   Geg.: $h = 1\text{m}$, $d = 0{,}45\text{m}$, $b = 1\text{m}$, $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\rho_{H_2O} = 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

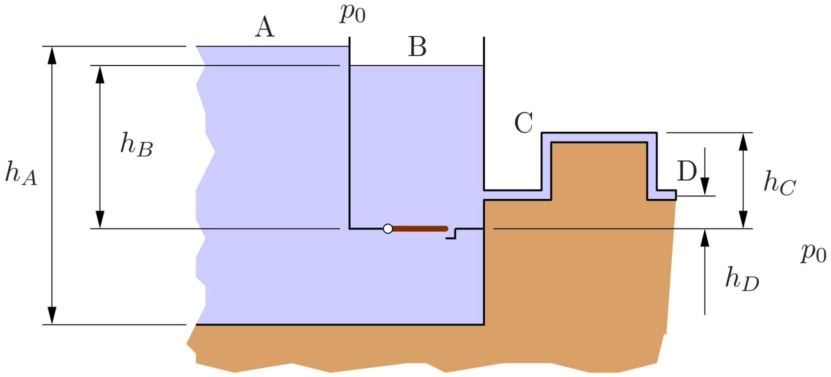
60. Die Öffnung einer Behälterwand wird durch eine Klappe K mit der Breite b (senkrecht zum Bild) und der Höhe h verschlossen. Sie ist über einen um O drehbaren und masselosen Winkelhebel mit einem zylindrischen masselosen Schwimmer S (Durchmesser d, Breite b) verbunden. Der Auftrieb des Hebels werde vernachlässigt.
   Geg.: p_0, s, h, b, ρ, g, d



   (a) Bestimmen Sie die Auftriebskraft des Schwimmers, wenn der Wasserspiegel auf der Höhe des Drehpunkts O liegt.
   (b) Bestimmen Sie die Druckverteilung innen an der Klappe und die Kraft, die aufgrund des Wasserdrucks von innen auf die Klappe wirkt.
   (c) Wie groß muss a sein, damit die Klappe öffnet, wenn der Wasserspiegel bis zur Höhe des Drehpunkts O gestiegen ist?

2.2 Bernoullische Gleichung

61. Das abgebildete System soll mit Mitteln der Stromfadentheorie untersucht werden. Es soll angenommen werden, daß die Rohrreibungsverluste vernachlässigt werden können.



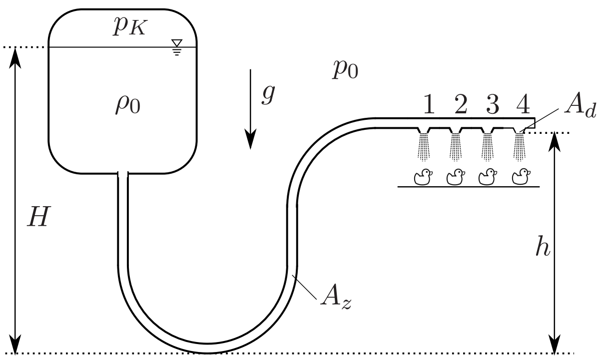
Es werden Zustände untersucht, bei denen die Klappe zwischen den beiden Wasserbehältern geschlossen ist.

(a) Zeigen Sie, daß bei der Höhe $h_B = \ldots$ des Wasserstandes im rechten Behälter der minimale Druck in der Rohrleitung gerade p_k ist. Die Dichte des Wasser sei ρ.

(b) Welche Masse m_K muß die Klappe haben, damit sie sich gerade dann beginnt zu öffnen, wenn der minimale Druck in der Rohrleitung p_k ist. Die Querschnittsfläche der Klappe sei A.

Geg.: p_0, g, h_A, h_C, h_D, A, ρ

62. Dargestellt ist ein Teil eines Produktionsprozesses bestehend aus einem Kessel mit 4 Brausköpfen zum Reinigen der durchlaufenden Güter. Der Umgebungsdruck sei p_0. Der Kesseldruck sei p_K. Die Querschnittsfläche der Auslässe der Brausen sei A_d, die Querschnittsfläche der Zuleitung sei A_z. Der Wasserspiegel im Kessel werde auf konstanter Höhe H gehalten. Hinweis: Entlang einer Stromlinie gilt: $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const.}$ (Bernoullische Gleichung)



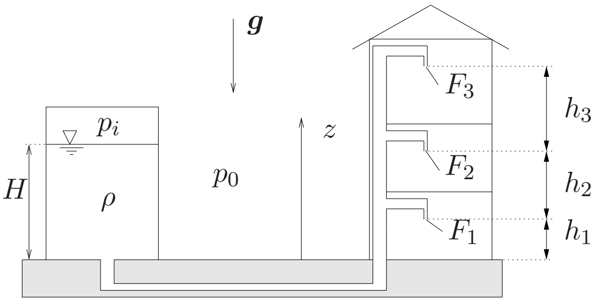
(a) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 und v_4 der Brausköpfe.

(b) Wir groß muss die Druckdifferenz $\triangle p := p_K - p_0$ sein, damit ein bestimmter Volumenstrom $\dot{V}$ (der sich auf alle 4 Brausköpfe verteilt) entnommen werden kann?

(c) Wie ändern sich die unter a) und b) berechneten Größen, wenn bei demselben Volumenstrom nur 2 Brausköpfe in Betrieb sind?

Geg.: p_0, p_k, h, H, A_z, A_d, g, ρ_0

63. Ein dreigeschossiges Wohnhaus werde aus einem Kessel versorgt. Die Füllhöhe H im Kessel sei konstant. Der Luftdruck im Kessel sei p_i. Der Austrittsquerschnitt F_1 und die Höhen der Austritte h_α ($\alpha = 1, 2, 3$) seien gegeben. Die Strömung sei stationär. Das Fluid sei inkompressibel und reibungsfrei. Der Umgebungsdruck betrage $p_0 = \frac{1}{6} p_i$.



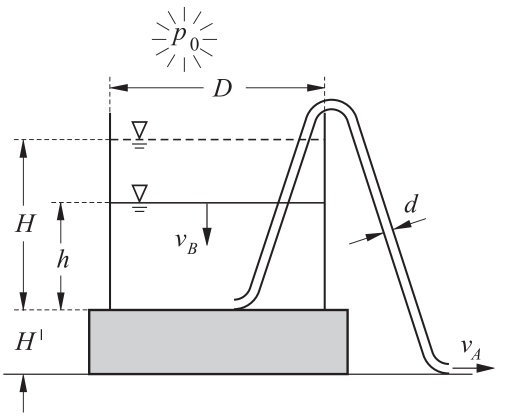
Hinweis: Entlang einer Stromlinie gilt:
$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = const.$ (BERNOULLIsche Gleichung)

(a) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 abhängig von den gegebenen Größen $p_0, \rho, g, H, h_1, h_2, h_3$.

(b) Wie groß müssen die Flächen F_2 und F_3 sein, damit überall derselbe Massenstrom $\dot{M}$ abfließt?

(c) In welcher maximalen Höhe über dem Boden z_{max} könnte gerade noch Wasser entnommen werden?

64. Auf einem Podest der Höhe $H' = 0,5$m steht ein großes Gefäß (Durchmesser $D = 1$m), welches bis zur Höhe $H = 1$m mit Wasser gefüllt ist (vgl. nebenstehende Skizze). Dieses Gefäß wird mit Hilfe eines Schlauches (Durchmesser $d = 1$cm) nach dem Heberprinzip entleert.

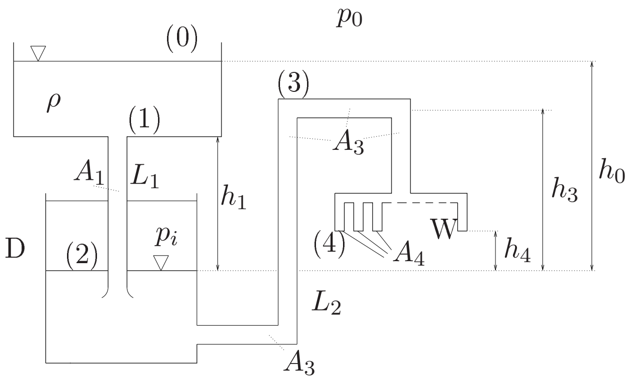


(a) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Wasseraustrittsgeschwindigkeit $v_A = f(h)$ am Schlauchende in Abhänigkeit von der veränderlichen Wasserhöhe h im Behälter?

(b) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Entleerungszeit T des Behälters?

Geg.: H, H', D, d, p_0

65. Bestimme für das dargestellte System unter der Voraussetzung stationärer Verhältnisse

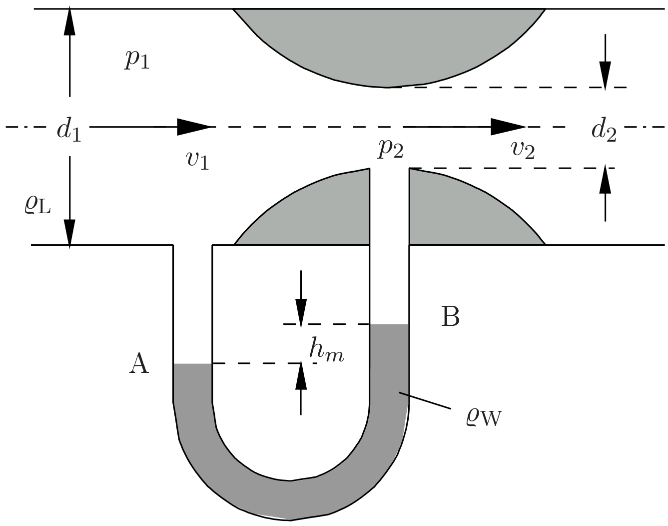


   (a) den Innendruck p_i des Druckbehälters D,

   (b) die maximal mögliche Anzahl von Entnahmestellen W unter der Bedingung, daß an keiner Stelle der Leitungen L_1 und L_2 Kavitation auftreten soll ($p \overset{!}{>} p_D$)!

   Geg.: h_0, h_1, h_3, h_4, A_1, A_3, A_4, ρ, Umgebungsdruck p_0, Dampfdruck p_D, mit $h_4 < h_1 < h_3 < h_0$ und $\frac{A_1}{2} = A_3 = 10\,A_4$, Erdbeschleunigung g.

66. Ein Hochofengebläse drückt Luft (Dichte ϱ_L) mit dem Druck p_1 in eine Rohrleitung vom Durchmesser d_1. Der Volumenstrom Q soll durch eine einfache Druckablesung kontrolliert werden. Zu diesem Zweck ist in die Leitung eine Verengung mit einem U-Rohr-Manometer eingebaut (Dichte der Flüssigkeit ϱ_W).



   (a) Berechnen Sie den Volumenstrom Q als Funktion der im Manometer angezeigten Höhendifferenz h_m bei vorgegebenen Durchmessern d_1 und d_2.

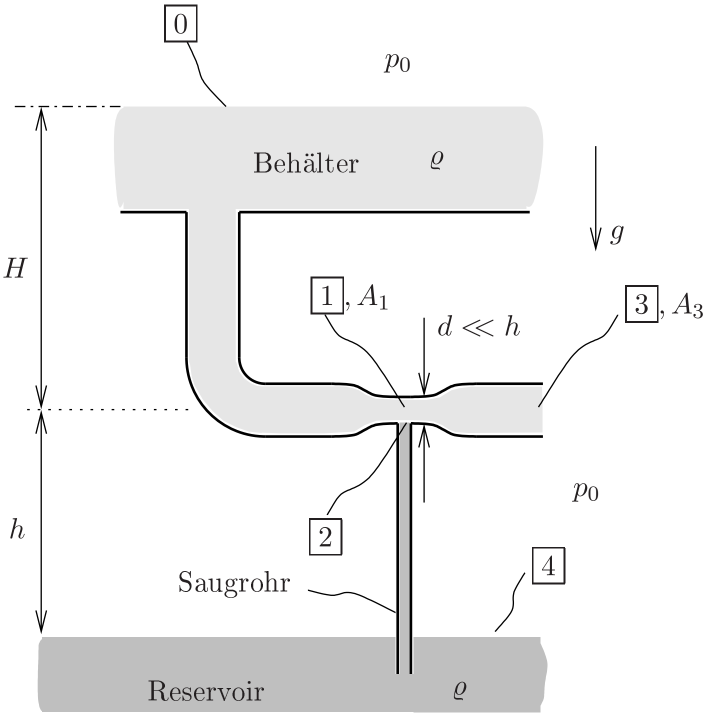
   (b) Berechnen Sie die Empfindlichkeit

$$S_Q = \frac{dh_m}{dQ}$$

   für das untersuchte Volumenstrommeßgerät. Zeichnen Sie die Empfindlichkeit S_Q unter Berücksichtigung charakteristischer Werte in einem Diagramm als Funktion des Volumenstroms Q.

   Gegeben: ϱ_W, ϱ_L, p_1, d_1, d_2, g, reibungsfreie, inkompressible Strömung

67. Eine Rohrleitung unter einem Wasserbehälter mündet ins Freie (Umgebungsdruck p_0). Mit Hilfe einer düsenförmigen Verengung und einem Saugrohr soll aus einem unteren Reservoir Wasser gefördert werden (Höhendifferenz zur Düse h).



(a) Wie groß ist der Druck p_2 an der Stelle $\boxed{2}$ zwischen Saugrohr und Düse, wenn das Saugrohr mit stehendem (also ruhendem) Wasser gefüllt ist?

(b) Welcher Zusammenhang muss zwischen dem Druck p_1 und dem eben berechneten Druck p_2 gelten, damit das Wasser aus dem Saugrohr sogar in die Düse hineingesaugt wird? (Annahme $d < < h$)

(c) Berechnen Sie mithilfe der Bernoulli-Gleichung $\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$ zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ den Druck p_1 an der Stelle $\boxed{1}$ abhängig von v_1 und v_3.

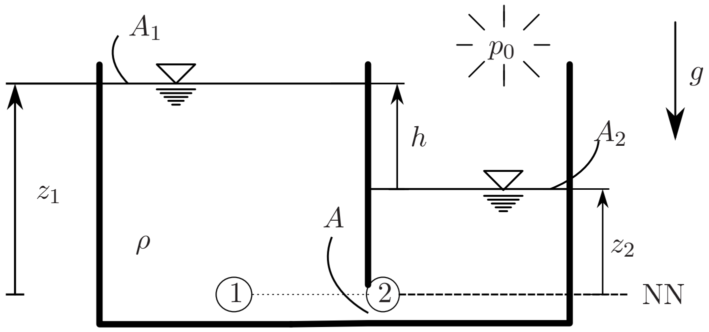
(d) Wie ist der Zusammenhang zwischen v_1 und v_3? (Massenbilanz, Kontinuitätsgleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$)

(e) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung nun noch zwischen $\boxed{0}$ und $\boxed{3}$.

(f) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche der Düse A_1, so dass Wasser angesaugt werden kann. Kontrollieren Sie die Einheiten in Ihrem Ergebnis.

Geg.: H, h, ρ, g, p_0, A_3.

68. Zwei Schleusenkammern (Wasserspiegelflächen A_1 und A_2) sind durch eine Klappenöffnung mit der Querschnittsfläche A miteinander verbunden. Die Höhen der Wasserspiegel über dem Nullniveau (NN) betragen z_1 bzw. z_2. Nach Öffnen der Klappe strömt Wasser von Kammer 1 nach Kammer 2, bis sich die Pegel der Kammern angeglichen haben.



(a) Bestimmen Sie die Drücke bei NN in Kammer 1 und in Kammer 2, wenn die Klappe zwischen den Kammern geschlossen ist.

(b) Nach dem Öffnen der Klappe bildet sich zwischen ① und ② eine Stromlinie aus. Dabei ist das Fluid bei ① in Ruhe und hat bei ② die Geschwindigkeit v. Bestimmen Sie v mit der BERNOULLI-Gleichung.

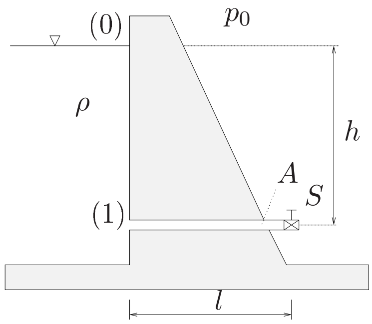
(c) Bestimmen Sie mittels der Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeiten $\dot{z}_1$ und $\dot{z}_2$ als Funktion der Geschwindigkeit v. *Hinweis: Beachten Sie die Richtungen der z-Koordinaten.*

(d) Der Spiegelunterschied ist $h = z_1 - z_2$. Bestimmen Sie $\dot{h}(h)$, mit Hilfe von Aufgabenteil (b) und (c).

(e) Ermitteln Sie nun $h(t)$ durch Integration. Zur Zeit $t = 0$ ist $h(t = 0) = H$.

Geg.: A_1, A_2, A, H, $\varrho = \text{const}$, p_0, g.

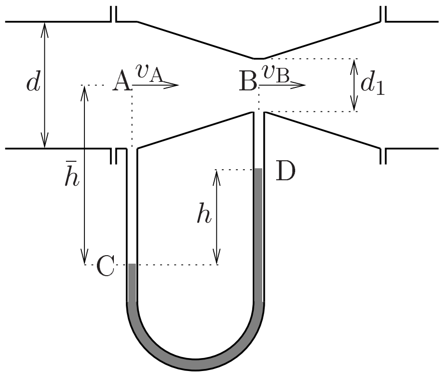
69. Durch plötzliches Öffnen des Schiebers S am Ende einer Druckrohrleitung (mit dem Querschnitt A und der Länge l) zum Zeitpunkt t_0 fließt Wasser aus einem Stausee Wasser ab.



(a) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Austrittsgeschwindigkeit $v_E(t)$. Das Absinken des Wasserspiegels des Stausees sei dabei vernachlässigbar.

(b) Wie groß ist die Drucksteigerung in der Leitung, wenn nach dem Erreichen des stationären Ausflußzustandes durch Schließen des Schiebers die Ausflußgeschwindigkeit v_E innerhalb eine kurzen Zeit τ linear auf null gebracht wird?

Geg.: A, l, t_0, h, p_0, ρ



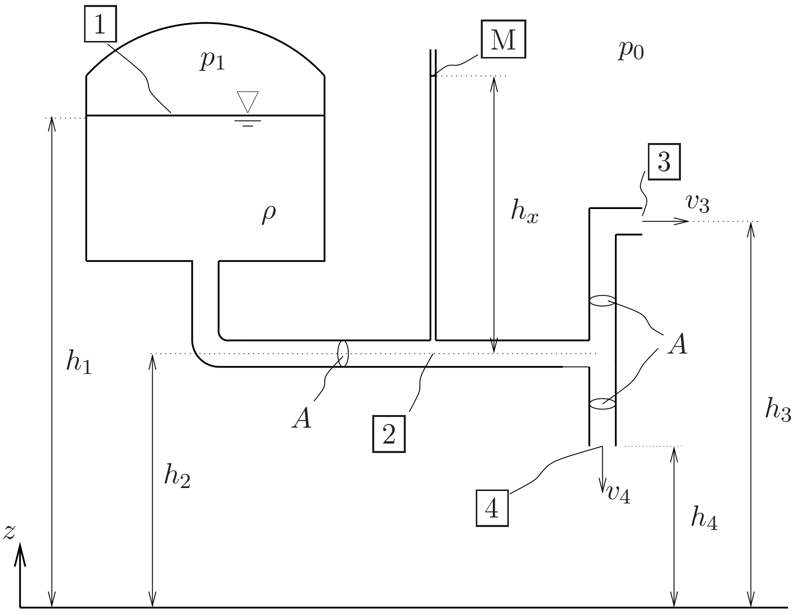
70. Zur Bestimmung der durch ein glattes Rohr vom Durchmesser d fließenden Wassermenge Q (Dichte ρ) wird ein sogenanntes Venturirohr eingebaut. Die Differenz der in den Punkten A und B in der Strömung vorhandenen Drücke wird durch den Niveauunterschied h in dem mit einer anderen Flüssigkeit (Dichte ρ^*) gefüllten U-Rohr charakterisiert.

    (a) Wie lautet der Zusammenhang zwischen v_A und v_B, der sich durch die Kontinuitätsgleichung ergibt?

    (b) Stellen Sie die Bernoullische Gleichung für die mittlere Stromlinie A-B auf! Hiermit und mit dem Ergebnis aus (a) lässt sich v_A abhängig von p_A, p_B und gegebenen Größen darstellen.

    (c) Bestimmen Sie nun $\triangle p = p_\mathrm{A} - p_\mathrm{B}$ und daraus den Durchfluss Q ($[Q] = 1\mathrm{kg/s}$) für die gegebenen Zahlenwerte! Benutzen Sie dabei die unten gegebenen Näherungen für g und π!

    Geg.: $d = 20\mathrm{cm}, d_1 = 10\mathrm{cm},\ h = 10\mathrm{cm},\ \rho = 10^3\mathrm{kg/m^3},\ \rho^* = 16 \cdot 10^3\mathrm{kg/m^3}$
    $g \approx 10\mathrm{m/s^2},\ \pi \approx 3$



71. Gegeben sei nebenstehend skizziertes Leitungssystem. Der Flüssigkeitspegel im Kessel werde durch eine Speisewasserpumpe auf konstanter Höhe gehalten.

    Geg.: $h_i (i = 1, \ldots, 4)$, A, ρ, p_0, Q_4, g

    (a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom Q_4 und der Austrittsgeschwindigkeit v_4 an der Stelle $\boxed{4}$ an. Wie groß ist dort der Druck?

    (b) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{4}$. Wie groß muss der Kesseldruck p_1 sein, damit an der Stelle $\boxed{4}$ ein vorgegebener Volumenstrom Q_4 entnommen werden kann?

    (c) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung nun zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$. Benutzen Sie das Ergebnis für den Druck p_1 aus Aufgabenpunkt (b), um die Austrittsgeschwindigkeit v_3 bei $\boxed{3}$ zu berechnen.

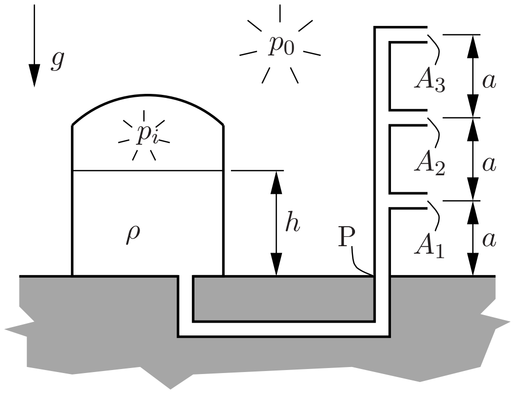
    (d) Auf welche Höhe h_x steigt der Wasserspiegel im Messrohr $\boxed{\mathrm{M}}$?

2.3 Impulssatz

72. Ein Wasserleitungssystem wird aus einem Druckbehälter gespeist. Aus allen drei Austrittsquerschnitten soll der gleiche Volumenstrom austreten. Die Füllhöhe h des Druckbehälters sei konstant. Das Wasser wird als inkompressibel und die Strömung als reibungsfrei angenommen.

    (a) Berechnen Sie die dazu erforderlichen Querschnitte A_2 und A_3!

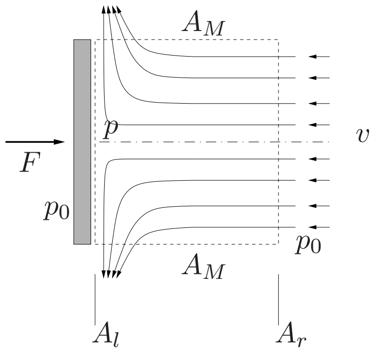
    (b) Berechnen Sie das Moment um den Punkt P, das durch den Rückstoß des austretenden Wassers entsteht. *Hinweis:* Die Ergebnisse für v_1, v_2 und v_3 aus Aufgabenteil (a) sollen nicht eingesetzt werden.



Geg.: A_1, p_0, p_i, a, h, ρ, g.

73. Eine starre Platte der Fläche A wird bei Windstille aus dem Fenster eines mit konstanter Geschwindigkeit v fahrenden Autos gehalten. Berechnen Sie die Kraft, die aufgebracht werden muß, um die Platte im Gleichgewicht zu halten. Schubspannungen dürfen vernachlässigt werden.

    Geg.: $\varrho = 1,29 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $v = 100 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, p_0, $A = 100\mathrm{cm}^2$

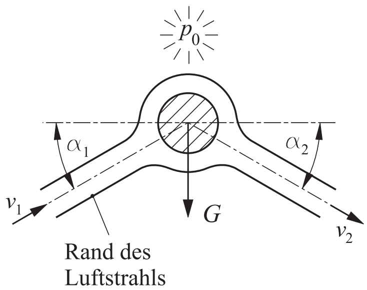


74. Ein Ball vom Gewicht G wird von einem Luftstrahl reibungsfrei umströmt und dadurch in der Schwebe gehalten. Der Strahl strömt unter dem Winkel α_1 mit der Geschwindigkeit v_1 an. Die Kompression der Luft in der Nähe des Balls kann ebenso vernachlässigt werden wie die Wirkung der Schwerkraft auf den Luftstrahl. Es soll keine horizontale Kraft vom Luftstrahl auf den Ball ausgeübt werden.

    (a) Wie groß ist v_2 (Abströmgeschwindigkeit)?

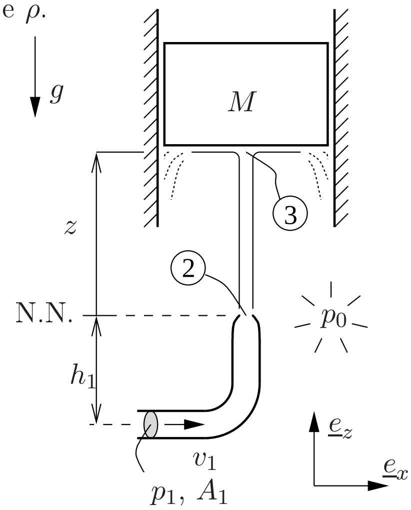
    (b) Wie groß ist der Abströmwinkel α_2?

    (c) Welcher Massenstrom im Strahl ist erforderlich, damit der Ball schwebt?



Geg.: v_1, G, α_1, p_0

75. Aus einem Rohr mit der Querschnittsfläche A_1 tritt an der Stelle 2 durch eine Düse (Querschnitt A_2) ein dünner Wasserstrahl aus und trifft an der Stelle 3 auf einen senkrecht geführten Kolben der Masse M. Dort wird der Strahl horizontal abgelenkt. Der dann folgende dünn gestrichelt gezeichnete weitere Verlauf soll nicht berücksichtigt werden. Die Reibung soll vernachlässigt werden, das Wasser habe die konstante Dichte ρ.



(a) Bestimmen Sie die Düsenaustrittsgeschwindigkeit v_2!

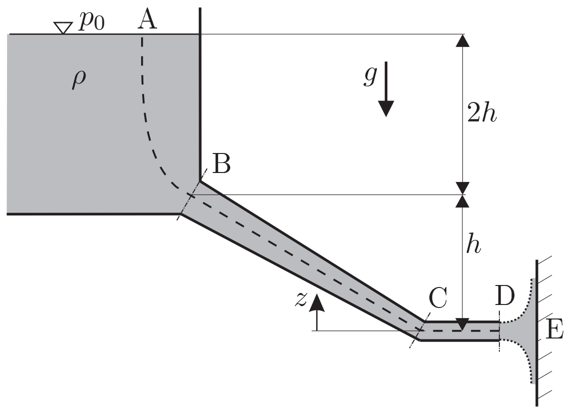
(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_3(z)$ des Wassers nach der Umlenkung am Kolben in Abhängigkeit von der Höhe z des Kolbens? *v_2 soll jetzt gegeben sein. Bitte das Ergebnis aus Teil (a) nicht mehr einsetzen!*

(c) Geben Sie den Vektor der Kraft an, die der Wasserstrahl auf den Kolben ausübt!

(d) Bestimmen Sie die statische Ruhelage des Kolbens z.

Geg.: A_1, p_1, A_2, h_1, p_0, g, ρ

76. Aus dem Abflussrohr eines großen Behälters trifft Wasser auf eine Wand.
Das Abflussrohr besitzt einen kreisförmigen Querschnitt. Der Querschnittsradius r verkleinert sich entlang der Rohrlänge linear von $r(z = h) = 2R$ bei B auf $r(z = 0) = R$ bei C. Zwischen C und D ist der Querschnitt konstant.
Die Querschnittsfläche des Abflussrohres ist im Vergleich zur freien Wasserfläche im Behälter vernachlässigbar klein. Außerdem ist auch der Radius r des Rohres gegenüber der Höhe h vernachlässigbar klein. Das Wasser kann als ideales Fluid und die Strömung als stationär betrachtet werden.
Gegeben: g, ρ, p_0, h, R



(a) Geben Sie den Wasserdruck $p(z)$ im Behälter in Abhängigkeit der Koordinate z an. Wie groß ist der Wasserdruck am Behälterboden (Tiefe $2h$)?

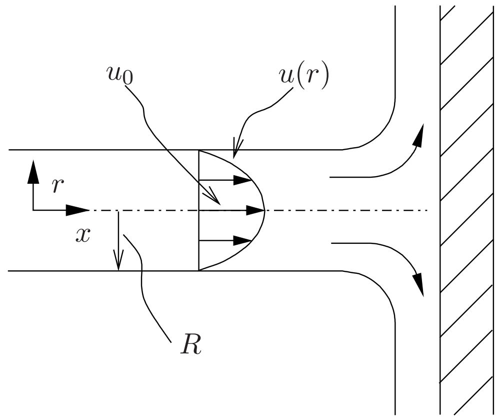
(b) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit $v(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(c) Ermitteln Sie den Druckverlauf $p(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(d) Welche Kraft übt der Wasserstrahl bei E auf die Wand aus?

Hinweis: Überlegen Sie bei (b) und (c) zunächst, wie groß Strömungsgeschwindigkeit und Druck an den Stellen D und C sind.

77. Ein Wasserstrahl (Dichte ρ), der ein Geschwindigkeitsprofil $u/u_0 = 1-(r/R)^2$ besitzt, tritt aus einem kreisförmigen Rohr (Radius R) ins Freie und trifft stromabwärts von der Rohrmündung auf eine senkrecht zum Strahl gestellte ebene Platte (vgl. nebenstehende Skizze).



   (a) Wie groß ist die auf die Platte wirkende Strahlkraft F ? Das Ergebnis ist in der Form $F = f_1(\rho, u_0, R)$ anzugeben.

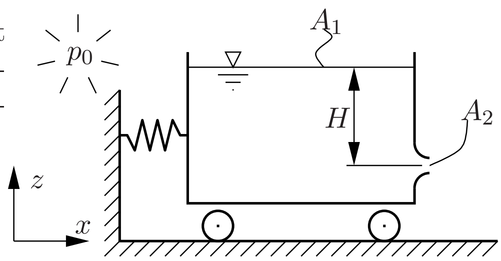
   (b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit im Rohr
   $\bar{u} = Q/\pi R^2 = f_2(u_0)$?

   (c) Die unter a) berechnete Strahlkraft F ist in der dimensionslosen Form $c_F = F/\left(\frac{\rho}{2}\bar{u}^2\pi R^2\right)$ anzugeben.

   (d) Wie groß ist der dimensionslose Beiwert c_F für den Fall einer reibungslosen Rohrströmung mit der über den Rohrquerschnitt konstanten Geschwindigkeit $\bar{u}$? Vergleichen Sie die Ergebnisse aus c) und aus d).

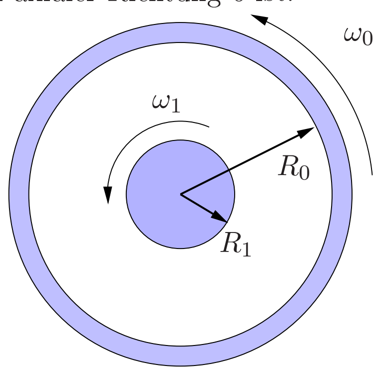
78. Entsprechend nebenstehender Skizze soll die Kraft berechnet werden, mit der die Feder infolge des verlustfreien Ausströmens einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte ρ zusammengedrückt wird.

   Geg.: $A_1 \gg A_2,\ H,\ p_0,\ g,\ \rho$



2.4 Reibungsbehaftete Strömungen

79. Ein inkompressibles Newtonsches Fluid (Dichte ρ, dynamische Viskosität η) befindet sich zwischen zwei unendlich langen Zylindern (Radien R_0 und R_1). Der äußere Zylinder rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0, der innere Zylinder mit ω_1. Für den untersuchten stationären Zustand soll angenommen werden, dass die Geschwindigkeit in axialer Richtung 0 ist.



(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $u_\varphi = u_\varphi(r)$ des Fluids. *Hinweis:* Das Materialgesetz lautet für das vorliegende Problem

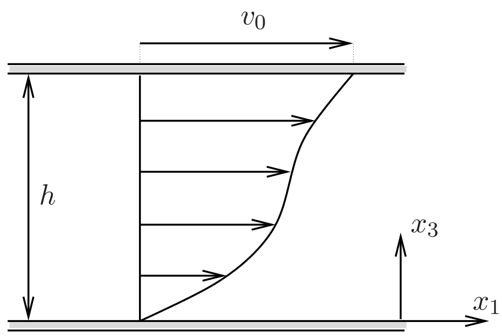
$$\tau_{r\varphi} = \eta r \frac{d}{dr}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) \quad .$$

(b) Wie groß ist der Druck $p = p(r)$?

Geg.: ω_0, ω_1, R_0, R_1, η, ρ

80. Reibungsbehaftete (i.A. kompressible) isotrope Fluide, die folgendem Schubspannungsansatz genügen, nennt man NEWTONsche Fluide:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (1)$$



Ein NEWTONsches, **inkompressibles** Fluid befinde sich zwischen zwei Platten mit Abstand h unter Vernachlässigung von Volumenkräften. Die obere Platte bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 in x_1-Richtung (s. Skizze). Das Fluid hafte an den beiden Platten, so dass nur v_1 von Null verschieden ist und von x_3 abhängt.

(a) Welche Form nimmt (1) an, wenn zusätzlich Inkompressibilität angenommen wird?

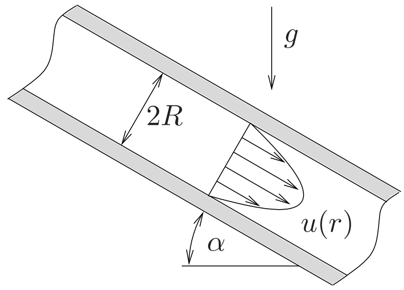
(b) Wie lautet die differentielle Form des Impulssatzes für stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluids ohne Volumenkräfte?

(c) Setzen Sie $\underline{v}$ und $\underline{\underline{\sigma}}$ in den Impulssatz ein, um 3 partielle Differentialgleichungen zu gewinnen!

(d) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass p sich in x_1-Richtung nicht ändert (ebene COUETTE-Strömung), um v_1 zu bestimmen!

(e) Nehmen Sie nun an, das p sich in x_1 ändert mit $\frac{dp}{dx_1} = const. = G < 0$ und dass beide Platten ruhen (ebene HAGEN-POISEUILLE-Strömung). Berechnen Sie wiederum v_1!

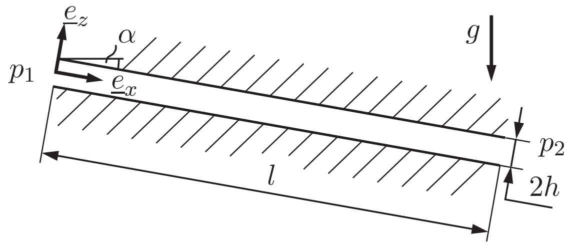
81. Betrachtet wird ein Rohr (Radius R, Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen α), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η, Dichte ρ) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden.



Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ bei stationärer Strömung in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.

Geg.: R, Q, η, α, g

82. Ein inkompressibles, Newtonsches Fluid (Dichte ρ, dynamische Viskosität η) fließt in $\underline{e}_x$-Richtung durch einen dünnen Spalt (Dicke $2h$, Länge l). Senkrecht zur Zeichenebene hat der Spalt die Breite b mit $b >> h$. Am linken Ende des Spalts herrscht der Druck p_1, am rechten Ende p_2. Im Spalt stellt sich eine stationäre, laminare Strömung ein. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Strömungsgeschwindigkeit $\underline{v \text{ nur von } z}$ und der Druck p nur von x abhängen.



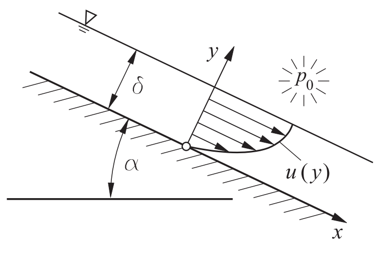
Geg.: $\eta, \rho, \alpha, g, l, h, p_1, p_2$

(a) Schneiden Sie ein Volumenelement des Fluids frei und ermitteln Sie daran das Strömungsprofil $v(z)$ im Spalt und die maximale Geschwindigkeit v_0.
Hinweis: Verwenden Sie ein Volumenelement, welches in $\underline{e}_z$-Richtung endlich breit ist und symmetrisch zur $\underline{e}_x$-Achse liegt. Überlegen Sie, was das für die Schubspannungen bedeutet.

(b) Bestimmen Sie den Volumenstrom Q durch den Spalt.

(c) Angenommen, das Fluid wäre reibungsfrei. Wie groß müsste die Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Vergleich zur maximalen Geschwindigkeit v_0 sein, damit sich derselbe Volumenstrom einstellt?

83. Längs einer unter $\alpha = 60^o$ gegen die Waagerechte geneigten Platte der Breite $b = 0{,}5$m fließt eine konstante Ölmenge $Q = 3\,$l/s als dünner Film der Stärke δ.



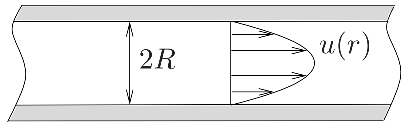
Annahme: Es stellt sich ein in x-Richtung konstantes Geschwindigkeits- und Druckprofil ein.

Man berechne

(a) die Geschwindigkeit im Film und

(b) die Filmdicke δ ($\nu = 0{,}436 \cdot 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$).

84. Betrachtet wird ein Rohr (Radius R), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ bei stationärer Strömung soll in den unten aufgeführten Schritten bestimmt werden.



(a) Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit $u(r)$

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx}$$

lautet.

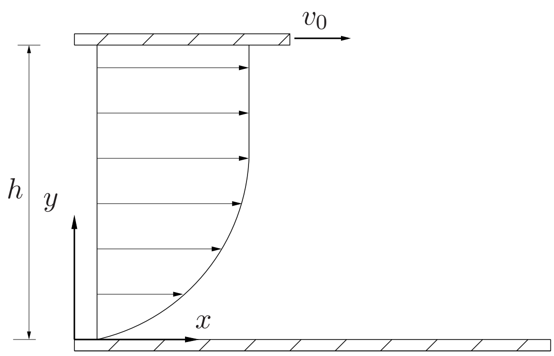
(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Bestimmen Sie nun das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit vom Druckgefälle.

(d) Leiten Sie schließlich eine Formel für das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ her, in der nur die gegebenen Größen enthalten sind.

Geg.: R, Q, η

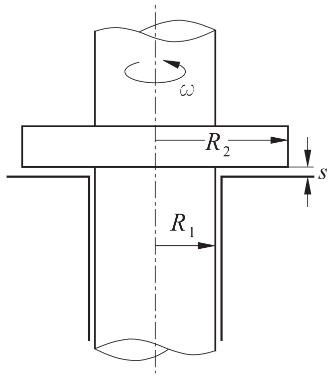
85. Eine ebene Platte wird in einem Abstand h über einer festen Platte wie skizziert mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 verschoben. Dabei stellt sich eine ebene Parallelströmung des Newtonschen Fluides ein. Vorausgesetzt sei eine stationäre, volumenkraftfreie, laminare Strömung.



(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil der Strömung zwischen den Platten, wenn es sich um ein inkompressibles Fluid handelt und die Platte eine genügend große Breite b besitzt, um diese Schichtenströmung zu ermöglichen.

(b) Diskutieren Sie das Ergebnis in Abhängigkeit des Druckgradienten.

Geg.: h, v_0, η, b



86. Das gezeichnete Traglager wird durch einen sehr dünnen Ölfilm der Dicke s geschmiert. Die Zähigkeit des Schmieröls sei η. Bestimmt werden soll das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung erforderliche Drehmoment $M(\omega)$ in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Reibung im Radiallagerteil (zylindrischer Bereich) soll dabei vernachlässigt werden.

    (a) Bestimme die Schubspannung $\tau(r)$ im Abstand r von der Drehachse bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit ω.

    (b) Wie groß ist das Drehmoment $dM(r)$, das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung eines Kreisringes mit der infinitesimalen Breite dr erforderlich ist?

    (c) Bestimme das Drehmoment $M(\omega)$!

    (d) Welches Drehmoment ergibt sich für $\omega = 318,3 \text{ min}^{-1}$?

Geg.: $R_1 = 0{,}2\text{m}$; $R_2 = 0{,}4\text{m}$; $s = 0{,}2\text{mm}$;
$\omega = 318{,}3\text{min}^{-1} \hat{=}\ n = 50.66\text{min}^{-1}$; $\eta = 0{,}4\text{Ns/m}^2$