Prüfungsklausur: Kontinuumsmechanik — WiSe 2013/2014

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

Nachname	__________	Vorname	__________
Studiengang	__________	Matrikelnummer	__________
Art der Klausur:		○ Prüfungsklausur	○ Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	Σ 1 - 4	5	Sichtung
erreichte Punkte					/ 40	/ 10	

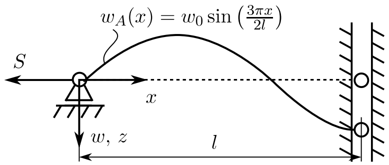
Die Klausur umfasst 5 Aufgaben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Dabei muss jedoch Aufgabe 5 (Kurzfragen) mit mind. 5 von 10 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein (**nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!**). Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet. Die Bearbeitungszeit beträgt 2 Stunden.

1 Freie Schwingung, Lösungsansatz nach D'Alembert — 3+2+2=7 Punkte

Skizziert ist eine Saite (Länge l, Massenbelegung μ) unter der Vorspannung S. Sie habe eine Anfangsauslenkung

$$w(x, t=0) = w_A(x) = w_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right).$$

Die Saite hat keine Anfangsgeschwindigkeit.



(a) Geben Sie die das System beschreibende Differentialgleichung an. Wie lautet die allgemeine Lösung nach D'ALEMBERT und wie die spezielle Lösung für diese Saite **(keine Herleitung notwendig)**?

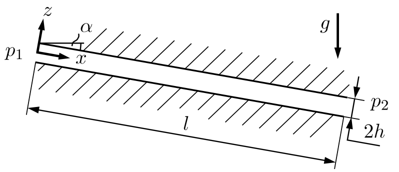
(b) Erstellen Sie eine Skizze der Wellen, die nach D'ALEMBERTscher Theorie "von außerhalb" einlaufen müssen, um die Randbedingungen erfüllen zu können. Zeichnen Sie die von rechts einlaufende Welle auf dem Gebiet $\{l, 2l\}$, die von links einlaufende auf dem Gebiet $\{-l, 0\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung die Randbedingungen erfüllt.
Hinweis: $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

Geg.: l, μ, S, w_0

2 (Bekannte Aufgabe) — (8 Punkte)

Ein inkompressibles newtonsches Fluid (Dichte ρ, dynamische Viskosität η) fließt in x-Richtung durch einen dünnen Spalt (Dicke $2h$, Länge l). Senkrecht zur Zeichenebene hat der Spalt die Breite b mit $b >> h$. Am linken Ende des Spalts herrscht der Druck p_1, am rechten Ende p_2. Im Spalt stellt sich eine stationäre, laminare Strömung ein. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Strömungsgeschwindigkeit <u>v nur von z</u> und der Druck <u>p nur von x</u> abhängen.



(a) Schneiden Sie ein Volumenelement des Fluids frei und ermitteln Sie daran das Strömungsprofil $v(z)$ im Spalt.
<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie ein Volumenelement, welches in z-Richtung endlich breit ist und symmetrisch zur x-Achse liegt. Überlegen Sie, was das für die Schubspannungen bedeutet.

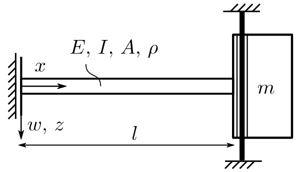
(b) Bestimmen Sie den Volumenstrom Q durch den Spalt.

Geg.: $\eta, \rho, \alpha, g, l, h, p_1, p_2$

3 Freie/erzwungene Balkenschwingung — 3+1+5+3+2+1+3=18 Punkte

Hinweis: Die Aufgabenteile (a)-(c) und (f)-(g) können unabhänging vom Rest der Aufgabe gelöst werden.

Ein schubstarrer, linear elastischer, homogener Balken (Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I, Querschnittsfläche A, Dichte ρ) ist links und rechts vertikal verschieblich gelagert. An seinem rechten Ende ist eine träge Masse m befestigt, welche an der Stange reibungsfrei gleitet.



(a) Leiten Sie die das Problem beschreibende Differentialgleichung an einem Freischnitt eines infinitesimalen Balkenelements her.

(b) Überführen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines BERNOULLI-Ansatzes in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Orts- und die Zeitfunktion.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung im Ort und die Randbedingungen für die Ortslösung an.

(d) Werten Sie die Randbedingungen aus, so dass Sie die charakteristische Gleichung des Systems erhalten.

(e) Gehen Sie nun davon aus, dass die Endmasse sehr groß sei ($m \to \infty$). Geben Sie die vereinfachte charakteristische Gleichung an und erstellen Sie eine Skizze zur graphischen Bestimmung ihrer Lösungen.

Nehmen Sie nun an, an der Endmasse m werde dem System eine vorgegebene Vertikalverschiebung in positive z-Richtung aufgezwungen $s(t) = s_0 \cos(\Omega t)$.

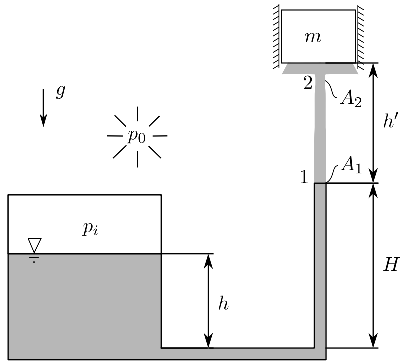
(f) Wie lauten nun Differentialgleichung und ihr Lösungsansatz für den eingeschwungenen Zustand?

(g) Geben Sie alle Randbedingungen für die Ortslösung an. Welchen Einfluss hat die Endmasse m auf die Schwingung des Systems? Begründen Sie Ihre Antwort.

Geg.: E, I, A, ρ, l, m, s_0, Ω

4 Bernoulli/Impulssatz — 2+1+1+1+2=7 Punkte

Es soll ein Brunnen gebaut werden, welcher eine Masse balancieren kann. Ein schematischer Aufbau ist nebenstehend dargestellt. Dabei soll eine stationäre und reibungsfreie Strömung eines inkompressiblen Fluides der Dichte ρ vorausgesetzt werden. Die zu balancierende Masse m bewege sich reibungsfrei ausschließlich in vertikaler Richtung.
Im Druckbehälter mit konstanter Füllhöhe h soll der Druck p_i derart gewählt werden, dass die Masse m 'schwebt'. Die Austrittsfläche am Rohr sei A_1.



(a) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit v_1 bei Punkt 1 als Funktion von p_i.

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit bei Punkt 2

(c) Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach dem Aufprall in horizontaler Richtung?

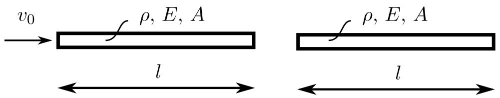
(d) Wie groß ist die Kraft, die vom Fluid auf die Masse m wirkt (nehmen Sie die Geschwindigkeiten aus a) und b) hier als gegeben an)?

(e) Wie groß muss der Druck p_i **mindestens** gewählt werden, damit die Masse m für ein $h' \geq 0$ schweben kann?

Geg.: p_0, h, H, h', A_1, g, ρ, m

5 Kurzfragen **10 Punkte**

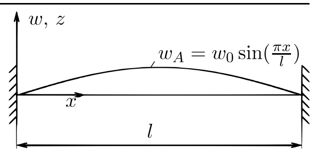
1. Ein homogener linear elastischer Stab (Dichte ρ, Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Länge l), trifft mit der Geschwindigkeit v_0 auf einen ruhenden, baugleichen Stab. Welche Zeit T vergeht zwischen dem Aufprall und dem Ablösen der Stäbe voneinander?



$T=$

Geg.: v_0, ρ, E, A, l, m **1 Punkt**

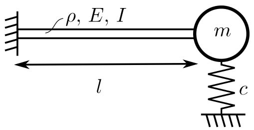
2. Skizziert ist eine Saite (Länge l, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c) mit einer Anfangsauslenkung $w(x, t = 0) = w_A$. Die erste Eigenkreisfrequenz des Systems sei bekannt als ω. Kreuzen Sie alle korrekten Lösung(en) $w(x, t)$ an.



☐ $w(x,t) = \frac{1}{2} w_0 \sin(\frac{\pi}{l}(x - ct)) + \frac{1}{2} w_0 \sin(\frac{\pi}{l}(x + ct))$ ☐ $w(x,t) = w_0 \sin(\frac{\pi x}{l}) \cos(\omega t)$
☐ $w(x,t) = w_0 \sin(\frac{\pi}{l}(x - ct))$ ☐ $w(x,t) = \frac{1}{2} w_0 \sin(\frac{\pi x}{l}) \sin(\omega t)$

Geg.: w_0, ω, l, c **1 Punkt**

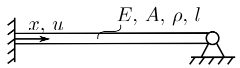
3. Skizziert ist ein homogener, schubstarrer Biegebalken (Länge l, Dichte ρ, Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I), an dessen Ende eine Masse m über eine Feder der Steifigkeit c abgestützt ist. Nennen Sie drei Möglichkeiten, einen Systemparameter so zu ändern, dass die **erste Biege-Eigenfrequenz** des Systems **erhöht** wird.

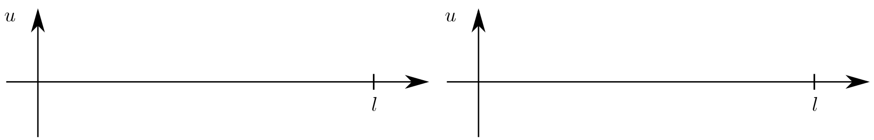


1.) 2.) 3.)

Geg.: ρ, m, l, E, I, c **1 Punkt**

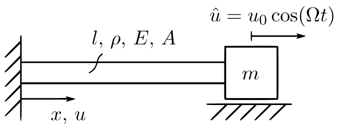
4. Für den abgebildeten linearelastischen, homogenen **Dehnstab** (Länge l, Dehnsteifigkeit EA, Dichte ρ) sollen qualitativ die ersten zwei Eigenformen skizziert werden. Berücksichtigen Sie die Randbedingungen.





Geg.: E, A, ρ, l **1 Punkt**

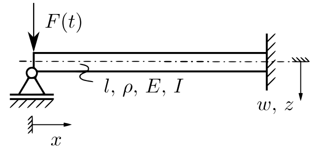
5. Skizziert ist ein linear elastischer Stab, der durch eine aufgezwungene Verschiebung $\hat{u}$ zu Längsschwingungen angeregt wird. Unter welcher / welchen Annahme(n) ist ein **Gleichtaktansatz/Ansatz vom Typ der rechten Seite** der Form $u(x,t) = U(x)\cos(\Omega t)$ zur Lösung des Systems zulässig? Kreuzen Sie an.



☐ Eingeschwungener Zustand ☐ Es gilt $m >> \rho l A$
☐ Homogenes Material ☐ Es gilt $m << \rho l A$

Geg.: l, ρ, E, A, m, $\hat{u} = u_0 \cos(\Omega t)$ **1 Punkt**

6. Skizziert ist ein schubstarrer, homogener, linearelastischer Biegebalken (Länge l, Dichte ρ, Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I), der überbestimmt gelagert ist. An seinem linken Ende greift eine periodische Kraft $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ an.
Nehmen Sie an, jegliche eventuelle Eigenschwingung sei abgeklungen. Welche Aussage(n) stimmt(stimmen)? Kreuzen Sie an.

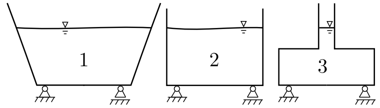


Der Balken ...

☐ ... schwingt mit der Frequenz Ω ☐ ... führt nur freie Eigenschwingungen aus.
☐ ... führt keine Biegeschwingungen aus. ☐ ... ist generell nicht schwingfähig.

Geg.: $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, l, ρ, E, I, Ω **1 Punkt**

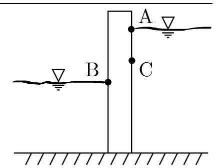
7. Die drei dargestellten Flüssigkeitsbehälter, mit vernachlässigbarem Eigengewicht, sind rotationssymmetrisch und haben alle die gleiche Grundfläche und die gleiche Füllhöhe. Vergleichen Sie zum einen die Kräfte der stehenden Flüssigkeit auf die Behälterböden $F_{B,i}$ und zum anderen die betragsmäßig Resultierende aus den vertikalen Lagerkräften $F_{\text{res},i}$. Tragen Sie dazu in die Kästchen jeweils $<$, $>$ oder $=$ ein.



$F_{B,1}$ ☐ $F_{B,2}$ ☐ $F_{B,3}$
$F_{\text{res},1}$ ☐ $F_{\text{res},2}$ ☐ $F_{\text{res},3}$

1 Punkt

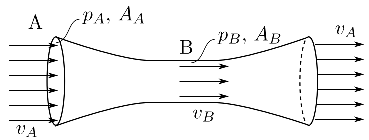
8. Dargestellt ist die Trennwand zwischen zwei offenen Wasserbecken mit unterschiedlichem Füllstand. Vergleichen Sie die Drücke in den Punkten A, B und C indem Sie in die Kästchen jeweils $<$, $>$ oder $=$ eintragen.



p_A ☐ p_B ☐ p_C

1 Punkt

9. Ein inkompressibles Fluid strömt wie dargestellt durch eine Düse. Was gilt für die Geschwindigkeiten und die Drücke v_A, v_B bzw. p_A, p_B, wenn für die Flächen gilt: $A_A > A_B$. Ergänzen Sie die Kästchen mit $<$, $>$ oder $=$.

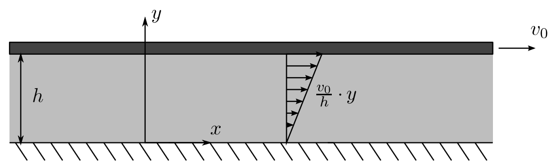


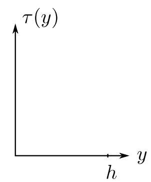
p_A ☐ p_B

v_A ☐ v_B

Geg.: $A_A > A_B$ **1 Punkt**

10. Ein inkompressibles newtonsches Fluid mit dynamischer Zähigkeit η fließe zwischen zwei Platten, von denen eine ruht und die andere mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegt wird. Es stellt sich das gezeigte Geschwindigkeitsprofil ein. Zeichnen Sie die sich ergebende Scherspannung in das dargestellte Diagramm ein. Geben Sie charakteristische Werte an.





Geg.: v_0, η, $v_x(y) = \frac{v_0}{h} y$, h **1 Punkt**

Aufgabe 1

(a) $\boxed{\sum = 3}$ DGL:

$\ddot{w}(x,t) = c^2 w''(x,t))$ mit $c = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$ $\boxed{1}$

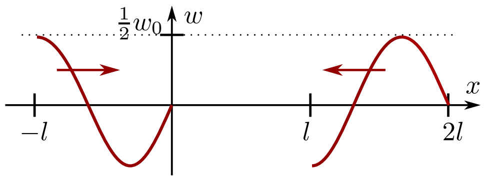
Allgemeine Lösung:

$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$ $\boxed{1}$

Spezielle Lösung:

$w(x,t) = \frac{1}{2}w_0\left[\sin(\frac{3\pi}{2l}(x+ct)) + \sin(\frac{3\pi}{2l}(x-ct))\right]$ $\boxed{1}$

(b) $\boxed{\sum = 2}$



$\boxed{2}$ 1 je Welle

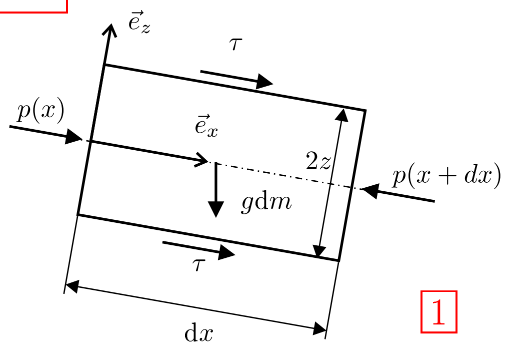
(c) $\boxed{\sum = 2}$ Randbedingungen:

$$w(0,t) = \frac{1}{2}w_0\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2l}ct\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2l}ct\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}w_0\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2l}ct\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2l}ct\right)\right] = 0 \quad \checkmark \boxed{1}$$

$$w'(l,t) = \frac{1}{2}w_0\frac{3\pi}{2l}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2l}(l+ct)\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2l}(l-ct)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}w_0\frac{3\pi}{2l}\left[\underbrace{2\cos\left(\frac{3\pi}{2l}l\right)}_{=0}\cos\left(\frac{3\pi}{2l}ct\right)\right] = 0 \quad \checkmark \boxed{1}$$

Aufgabe 2

(a) $\boxed{\sum = 6}$ Freischnitt:



$\boxed{1}$

Aus Symmetriegründen sind die Schubspannungen am oberen und am unteren Rand identisch. Da die Strömung stationär ist, müssen die Kräfte in $\vec{e}_x$-Richtung im Gleichgewicht sein:

$$0 = 2zb\left(p(x) - p(x+dx)\right) + gdm\sin\alpha + 2\tau b dx$$
$$= -z\left(p(x+dx) - p(x)\right) + \rho g z \sin\alpha dx + \tau dx$$
$$\tau = \frac{dp}{dx}z - \rho g z\sin\alpha. \quad \boxed{1} \tag{1}$$

Mit

$$\tau = \eta\frac{dv}{dz} \quad \boxed{1} \tag{2}$$

folgt

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\sin\alpha\right)z \tag{3}$$

und nach Integration über z:

$$v(z) = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g\sin\alpha\right)\frac{z^2}{2\eta} + c \quad \boxed{1} \tag{4}$$

Die Konstante c wird aus der Randbedingung

$$v(\pm h) = 0 \quad \boxed{1} \tag{5}$$

bestimmt:

$$v(h) = 0 = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g\sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta} + c$$
$$\Leftrightarrow c = -\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta}. \tag{6}$$

Da die Geschwindigkeit gemäß Aufgabenstellung nicht von x abhängt, muss $\frac{dp}{dx}$ konstant bezüglich x sein und es gilt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}, \quad \Delta p := p_2 - p_1. \tag{7}$$

Somit hat die Geschwindigkeit das Profil:

$$v(z) = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g\sin\alpha\right)(z^2 - h^2) \quad \boxed{1} \tag{8}$$

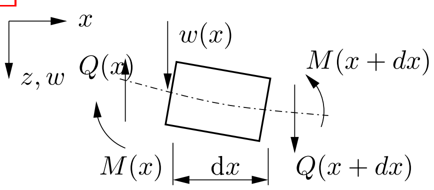
Die maximale Geschwindigkeit ist an der Stelle $z = 0$:

(b) $\boxed{\sum = 2}$ Der Volumenstrom ist:

$$Q = \int_A v(z)dA = b\int_{-h}^{+h} v(z)dz \quad \boxed{1} \tag{9}$$
$$= 2\frac{b}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g\sin\alpha\right)\int_0^{+h}(z^2 - h^2)dz$$
$$= \frac{b}{\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g\sin\alpha\right)\left[\frac{1}{3}z^3 - h^2 z\right]_0^h$$
$$= \frac{2bh^3}{3\eta}\left(\rho g\sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \quad \boxed{1} \tag{10}$$

Aufgabe 3

(a) $\boxed{\sum = 3}$



$\boxed{1}$
Das zweite Newtonsche Gesetz liefert

$$dx\rho A\ddot{w}(x,t) = Q(x+dx,t) - Q(x,t) \quad \boxed{1}$$
$$\Rightarrow \rho A\ddot{w}(x,t) = Q'(x,t)$$

mit $Q(x,t) = -EIw'''(x,t)$ folgt

$$\ddot{w}(x,t) = -c^2 w''''(x,t) \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad \boxed{1} \tag{11}$$

(b) $\boxed{\sum = 1}$ Mit $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ folgt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$
$$X'''' - \kappa^4 X = 0 \quad , \quad \kappa^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

$\boxed{1}$ mit Definition für Kappa

(c) $\boxed{\sum = 5}$ Allg Lösung:
$X(x) = A\cos(\kappa x) + B\sin(\kappa x) + C\cosh(\kappa x) + D\sinh(\kappa x)$
$\boxed{1}$
RB:

$$w'(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \tag{12}$$
$$Q(0,t) = 0 \Rightarrow X'''(0) = 0 \tag{13}$$
$$w'(l,t) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0 \tag{14}$$

$\boxed{1}$ RB $\boxed{1}$ Überführung (15)

$$m\ddot{w}(l,t) = -Q(l,t) = EIw'''(l,t) \quad \boxed{1} \tag{16}$$
$$\text{mit } \ddot{w}(l,t) = -X(l)\omega^2 T(t) \tag{17}$$
$$-m\omega^2 X(l) = EIX'''(l) \quad \boxed{1} \tag{18}$$

(d) $\boxed{\sum = 3}$ Aus (12) und (13) folgt

$$B = D = 0 \quad \boxed{1}$$

Aus (14) folgt

$$C\sinh(\kappa l) = A\sin(\kappa l) \quad \boxed{1}$$

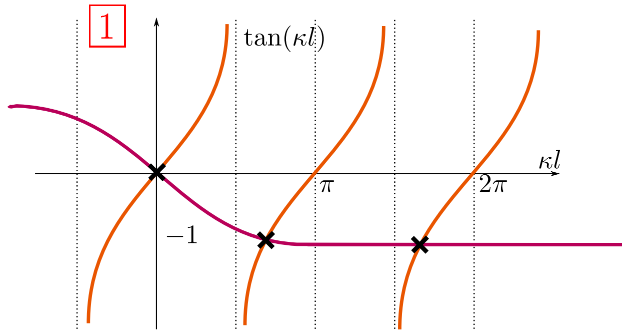
Einsetzen in (18) liefert schließlich

$$(2\kappa^3 EI + m\omega^2)\tanh(\kappa l) + m\omega^2\tan(\kappa l) = 0 \quad \boxed{1}$$

(e) $\boxed{\sum = 2}$ Vereinfachte Gleichung:

$$\tan(\kappa l) = -\tanh(\kappa l) \quad \boxed{1}$$

$\boxed{1}$



(f) $\boxed{\sum = 1}$ DGL: $EIw'''' + \rho A\ddot{w} = 0$
Ansatz: $w(x,t) = \hat{w}(x) \cdot \cos\Omega t$ $\boxed{1}$ ein für beides

(g) $\boxed{\sum = 3}$ RB:

$$w'(0,t) = 0 \Rightarrow \hat{w}'(0) = 0$$
$$Q(0,t) = 0 \Rightarrow \hat{w}'''(0) = 0$$
$$w'(l,t) = 0 \Rightarrow \hat{w}'(l) = 0$$
$$w(l,t) = s_0\sin(\Omega t) \Rightarrow \hat{w}(l) = s_0$$

$\boxed{2}$ für vier, eine fuer drei und eine fuer $w(l,t)$
Die Masse m hat keinen Einfluss, da die Verschiebung bei $x = l$ vorgegeben ist / da sie nicht mehr in den RB auftaucht. $\boxed{1}$

Aufgabe 4

(a) $\boxed{\sum = 2}$ Bernoulli von innen nach 1:

$$\frac{p_i}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + gH + \frac{1}{2}v_1^2 \quad \boxed{1} \tag{19}$$
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2\frac{p_i - p_0}{\rho} + 2g(h-H)} \quad \boxed{1} \tag{20}$$

(b) $\boxed{\sum = 1}$ Bernoulli von 1 nach 2:

$$\frac{p_0}{\rho} + g(H+h') + \frac{1}{2}v_{2,v}^2 = \frac{p_0}{\rho} + gH + \frac{1}{2}v_1^2 \tag{21}$$
$$\Rightarrow v_{2,v} = \sqrt{v_1^2 + 2g(h')} \tag{22}$$
$$\Rightarrow v_{2,v} = \sqrt{2\frac{p_i - p_0}{\rho} + 2g(h - H - h')} \quad \boxed{1} \tag{23}$$

(c) $\boxed{\sum = 1}$ Bernoulli an der Umlenkstelle: $v_{2,v} = v_{2,h}$

(d) $\boxed{\sum = 1}$ $F = \rho A_1 v_1(0 - v_{2,v}) = -\rho A_1 v_1 v_{2,v}$ $\boxed{1}$

(e) $\boxed{\sum = 2}$ Es muss für $h' = 0$ gelten:

$$mg = \rho A_1 v_1^2 \quad \boxed{1} \tag{24}$$

Damit folgt für den Druck p_i:

$$\frac{mg}{\rho A_1} = v_1^2 = 2\frac{p_i - p_0}{\rho} + 2g(h-H) \tag{25}$$
$$\Rightarrow p_i = \frac{mg}{2A_1} - \rho g(h-H) + p_0 \quad \boxed{1} \tag{26}$$