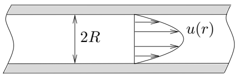
Tutorium

Aufgabe 84

Betrachtet wird ein Rohr (Radius R), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ bei stationärer Strömung soll in den unten aufgeführten Schritten bestimmt werden.



(a) Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit $u(r)$

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx}$$

lautet.

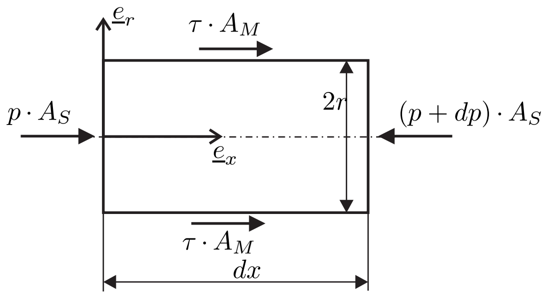
(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Bestimmen Sie nun das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit vom Druckgefälle.

(d) Leiten Sie schließlich eine Formel für das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ her, in der nur die gegebenen Größen enthalten sind.

Geg.: R, Q, η

Freischnitt eines Volumenelements (Zylinder)



Annahmen:
- schleichende Strömung $\Rightarrow \frac{d\underline{v}}{t} = 0$
- Inkompressibilität
- Druck hängt nur von x ab $\Rightarrow p = p(x)$

(a)

$$m\ddot{x} = \sum F_x = 0 = \tau A_M + pA_S - (p+dp)A_S \tag{1}$$

$$\Rightarrow \tau \cdot 2\pi r \cdot x - dp\,\pi r^2 = 0 \tag{2}$$

NEWTONsches-Schubspannungsgesetz

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dr} \tag{3}$$

$$\tau 2\pi r\, dx = \pi r^2\, dp \tag{4}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{r}{2}\frac{dp}{dx} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \eta\frac{dv_x}{d_r} = \frac{r}{2}\frac{dp}{dx} \tag{6}$$

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx} \tag{7}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}r^2 + C \tag{8}$$

(b) Randbedingung

Haften am Rand

$$v_x(r=R) = 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}R^2 + C \tag{10}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}R^2 \tag{11}$$

(c) Geschwindigkeitsprofil

$$v_x(r) = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) \tag{12}$$

Beachten der Bedingung $Q = \text{const.}$:

$$Q = \int_{(A)} v(r)\, dA \tag{13}$$

$$\text{mit } dA = 2\pi r\, dr \tag{14}$$

$$Q = \int_0^R \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) 2\pi r\, dr \tag{15}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}2\pi \int_0^R \left(r^3 - rR^2\right)\, dr \tag{16}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{\pi}{2\eta}\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}R^2r^2\right]_0^R \tag{17}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{\pi}{2\eta}\left[\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{2}R^4\right] \tag{18}$$

$$Q = -\frac{dp}{dx}\frac{\pi}{8\eta}R^4 \tag{19}$$

(d) Druckgradient $\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\eta Q}{\pi R^4} \tag{20}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = -\frac{2Q}{\pi R^4}\left(r^2 - R^2\right) \tag{21}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{2Q}{\pi R^2}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{22}$$

Alternativ: Herleitung über die NAVIER-STOCKES-Gleichung:

$$\rho\frac{d\underline{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\underline{v} + \rho\underline{g} \tag{23}$$

Mit

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = 0 \tag{24}$$

$$\underline{g} \text{ wirkt nicht in } x\text{-Richtung} \tag{25}$$

$$p = p(x) \tag{26}$$

$$\operatorname{grad} p = \nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{(für Zylinderkoord.)} \tag{27}$$

$$\underline{v} = v_x(r)\underline{e}_x \tag{28}$$

Es ist demnach nur die x-Komponente von Belang. Der LAPLACE-Operator in Zylinderkoordinaten lautet:

$$\Delta v_x(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \tag{29}$$

Damit ergibt sich aus (23):

$$\operatorname{grad} p = \eta\Delta\underline{v} + \rho\underline{g} \tag{30}$$

$$\Rightarrow \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = \frac{dp}{dx} \tag{31}$$

$$\eta r\frac{\partial v_x}{\partial r} = \int \frac{dp(x)}{dx} r\,dr \tag{32}$$

$$\eta r\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{dp}{dx}\frac{r^2}{2} + C \tag{33}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx} + \frac{C}{\eta r} \tag{34}$$

Mit der Randbedingung

$$\tau(r=0) = \tau \tag{35}$$

folgt für die Integrationskonstante

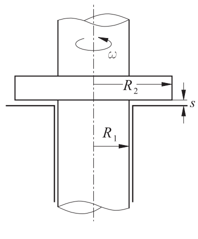
$$C = 0 \tag{36}$$

und damit das Ergebnis

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx}} \quad . \tag{37}$$

Aufgabe 86

Das gezeichnete Traglager wird durch einen sehr dünnen Ölfilm der Dicke s geschmiert. Die Zähigkeit des Schmieröls sei η. Bestimmt werden soll das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung erforderliche Drehmoment $M(\omega)$ in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Reibung im Radiallagerteil (zylindrischer Bereich) soll dabei vernachlässigt werden.



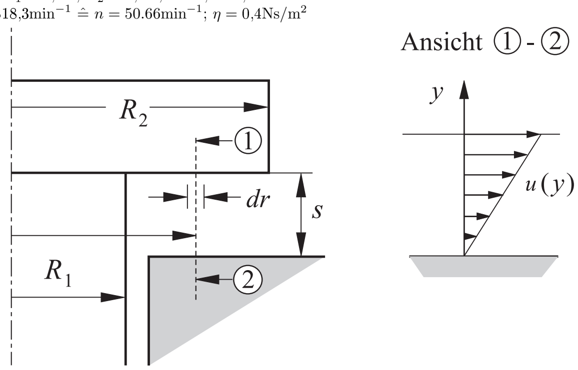
(a) Bestimme die Schubspannung $\tau(r)$ im Abstand r von der Drehachse bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit ω.

(b) Wie groß ist das Drehmoment $dM(r)$, das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung eines Kreisringes mit der infinitesimalen Breite dr erforderlich ist?

(c) Bestimme das Drehmoment $M(\omega)$!

(d) Welches Drehmoment ergibt sich für $\omega = 318,3\,\mathrm{min}^{-1}$?

Geg.: $R_1 = 0{,}2$m; $R_2 = 0{,}4$m; $s = 0{,}2$mm;
$\omega = 318{,}3\mathrm{min}^{-1} \mathrel{\hat{=}} n = 50.66\mathrm{min}^{-1}$; $\eta = 0{,}4\mathrm{Ns/m}^2$



(a) Für die Spannung $\tau(r)$ gilt nach dem Newtonschen Reibungsgesetz (Couette-Strömung ohne Druckgradient):

$$\tau(r) = \eta\cdot\frac{du}{dy} = \eta\cdot\frac{\Delta u}{\Delta y} = \eta\cdot\frac{u_{\text{Welle}}(r)}{s} \tag{38}$$

mit

$$u_{\text{Welle}}(r) = r\cdot\omega \tag{39}$$

Damit folgt:

$$\tau(r) = \eta\cdot\frac{r\cdot\omega}{s} \tag{40}$$

(b) Für das Drehmoment dM des Kreisringes mit dem Radius r und der Breite dr gilt:

$$dM = \tau(r)\cdot r\cdot dA \tag{41}$$

Mit der Fläche des Kreisringes

$$dA = 2\pi\cdot r\cdot dr \tag{42}$$

und Gleichung (40) wird daraus

$$dM = \frac{2\pi\eta\omega}{s}r^3 dr\ . \tag{43}$$

(c) Das Gesamtdrehmoment ergibt sich daraus durch Integration:

$$M = \int_{R_1}^{R_2} dM \tag{44}$$

$$= \frac{2\pi\cdot\eta\cdot\omega}{s}\cdot\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \tag{45}$$

$$= \frac{2\pi\cdot\eta\cdot\omega}{s}\cdot\left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right) \tag{46}$$

$$= \frac{\pi\cdot\eta\cdot\omega}{2s}\cdot\left(R_2^4 - R_1^4\right) \tag{47}$$

(d) Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

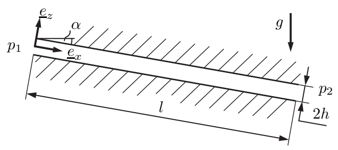
$$M = \frac{\pi\cdot 0{,}4\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}\cdot 318{,}3\frac{1}{\mathrm{min}}\cdot\frac{1\mathrm{min}}{60\mathrm{s}}\left[(0{,}4\mathrm{m})^4 - (0{,}2\mathrm{m})^4\right]}{2\cdot 0{,}0002\mathrm{m}}$$

$$\approx 400\mathrm{Nm}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 82

Ein inkompressibles, Newtonsches Fluid (Dichte ρ, dynamische Viskosität η) fließt in $\underline{e}_x$-Richtung durch einen dünnen Spalt (Dicke $2h$, Länge l). Senkrecht zur Zeichenebene hat der Spalt die Breite b mit $b >> h$. Am linken Ende des Spalts herrscht der Druck p_1, am rechten Ende p_2. Im Spalt stellt sich eine stationäre, laminare Strömung ein. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Strömungsgeschwindigkeit $\underline{v}$ nur von z und der Druck p nur von x abhängen.
Geg.: $\eta, \rho, \alpha, g, l, h, p_1, p_2$

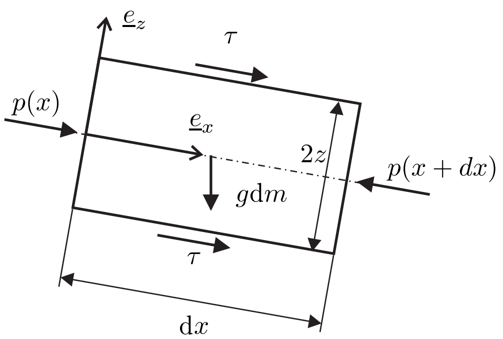


(a) Schneiden Sie ein Volumenelement des Fluids frei und ermitteln Sie daran das Strömungsprofil $v(z)$ im Spalt und die maximale Geschwindigkeit v_0.
<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie ein Volumenelement, welches in $\underline{e}_z$-Richtung endlich breit ist und symmetrisch zur $\underline{e}_x$-Achse liegt. Überlegen Sie, was das für die Schubspannungen bedeutet.

(b) Bestimmen Sie den Volumenstrom Q durch den Spalt.

(c) Angenommen, das Fluid wäre reibungsfrei. Wie groß müsste die Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Vergleich zur maximalen Geschwindigkeit v_0 sein, damit sich derselbe Volumenstrom einstellt?

(a) Freischnitt:



Aus Symmetriegründen sind die Schubspannungen am oberen und am unteren Rand identisch. Da die Strömung stationär ist, müssen die Kräfte in $\underline{e}_x$-Richtung im Gleichgewicht sein:

$$\begin{aligned}0 &= 2zb\,(p(x) - p(x+dx)) + gdm\sin\alpha + 2\tau b dx \\ &= -z\,(p(x+dx) - p(x)) + \rho g z \sin\alpha dx + \tau dx \\ \tau &= \frac{dp}{dx}z - \rho g z \sin\alpha. \end{aligned} \tag{48}$$

Mit

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \tag{49}$$

folgt

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right) z \tag{50}$$

und nach Integration über z:

$$v(z) = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{z^2}{2\eta} + c \tag{51}$$

Die Konstante c wird aus der Randbedingung

$$v(\pm h) = 0 \tag{52}$$

bestimmt:

$$\begin{aligned} v(h) = 0 &= \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta} + c \\ \Leftrightarrow c &= -\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta}. \end{aligned} \tag{53}$$

Da die Geschwindigkeit gemäß Aufgabenstellung nicht von x abhängt, muss $\frac{dp}{dx}$ konstant bezüglich x sein und es gilt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}, \quad \Delta p := p_2 - p_1. \tag{54}$$

Somit hat die Geschwindigkeit das Profil:

$$v(z) = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)(z^2 - h^2) \tag{55}$$

Die maximale Geschwindigkeit ist an der Stelle $z = 0$:

$$v_0 = v(z=0) = \frac{h^2}{2\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \tag{56}$$

(b) Der Volumenstrom ist:

$$Q = \int_A v(z)dA = b\int_{-h}^{+h} v(z)dz \tag{57}$$

$$\begin{aligned} &= 2\frac{b}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)\int_0^{+h}(z^2 - h^2)dz \\ &= \frac{b}{\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)\left[\frac{1}{3}z^3 - h^2 z\right]_0^h \\ &= \frac{2bh^3}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \end{aligned} \tag{58}$$

(c) Im Falle eines reibungsfreien Fluides wäre die notwendige Geschwindigkeit $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}. \tag{59}$$

Mit dem Volumenstrom aus Aufgabenteil (b) und der Querschnittsfläche $A = 2bh$ folgt

$$\bar{v} = \frac{h^2}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right) \tag{60}$$

und durch den Vergleich mit Gleichung (56):

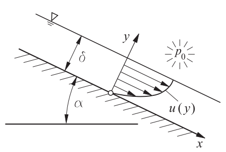
$$\bar{v} = \frac{2}{3}v_0. \tag{61}$$

Aufgabe 83

Längs einer unter $\alpha = 60^o$ gegen die Waagerechte geneigten Platte der Breite $b = 0{,}5$m fließt eine konstante Ölmenge $Q = 3$l/s als dünner Film der Stärke δ.

Annahme: Es stellt sich ein in x-Richtung konstantes Geschwindigkeits- und Druckprofil ein.

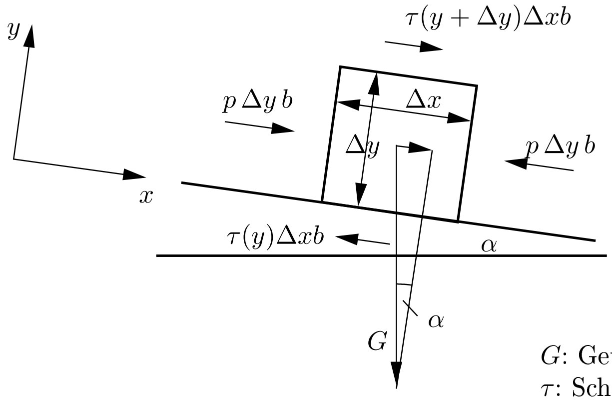
Man berechne



(a) die Geschwindigkeit im Film und
(b) die Filmdicke δ ($\nu = 0{,}436 \cdot 10^{-4}$m^2/s).

a) <u>Geschwindigkeitsverteilung:</u>

Aus der Impulsbilanz folgt das Kräftegleichgewicht wegen $u =$ konst. $\Rightarrow$ keine Beschleunigung. In x-Richtung an einem beliebigen Volumenelement $dx\,dy\,b$ (Beachte die Annahme $\frac{dp}{dx} = 0$):



G: Gewichtskraft
τ: Schubspannung

$$0 = G\sin\alpha + \tau(y+\Delta y)\Delta x\, b - \tau(y)\Delta x\, b \tag{62}$$

mit $G = \rho g b\,\Delta x\,\Delta y$:

$$\rho g\,\Delta x\,\Delta y\, b\sin\alpha + \tau(y+\Delta y)\Delta x\, b - \tau(y)\Delta x\, b = 0 \tag{63}$$

$$-\rho g\sin\alpha = \frac{\tau(y+\Delta y)-\tau(y)}{\Delta y} \xrightarrow{\Delta y\to 0} \frac{d\tau}{dy} \tag{64}$$

Mit dem Newtonschen Reibungsgesetz

$$\tau = \eta\cdot\frac{du}{dy} \tag{65}$$

wird aus (64):

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{-\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha \tag{66}$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha\cdot y + c_1 \tag{67}$$

$$u = -\frac{\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{y^2}{2} + c_1\cdot y + c_2 \tag{68}$$

Die Konstanten werden durch Einsetzen der Randbedingungen ermittelt:

Haftbedingung an der Wand:

$$u(y=0) = 0 \quad\Rightarrow\quad c_2 = 0 \tag{69}$$

Schubspannung an der Oberfläche = 0:

$$\tau(y=\delta) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dy} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = \frac{\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha\cdot\delta \tag{70}$$

Eingesetzt in (68) ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung im Film (mit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, $\nu\ldots$ kinematische Zähigkeit, $\eta\ldots$ (dynamische, absolute) Zähigkeit):

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho\cdot g}{\eta}\sin\alpha\cdot\left(\delta\cdot y - \frac{y^2}{2}\right) \\ &= \frac{g\cdot\sin\alpha}{\nu}\cdot\left(\delta\cdot y - \frac{y^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{71}$$

b) Filmdicke δ:

Für die Durchflußmenge gilt:

$$Q = b\cdot\int_0^\delta u(y)dy \tag{72}$$

mit (71):

$$Q = b\cdot\int_0^\delta\left[\frac{g}{\nu}\cdot\sin\alpha\cdot\left(\delta\cdot y - \frac{y^2}{2}\right)\right]\cdot dy \tag{73}$$

$$= \frac{b\cdot g\cdot\sin\alpha}{\nu}\cdot\left[\frac{\delta\cdot y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^\delta \tag{74}$$

$$= \frac{b\cdot g\cdot\sin\alpha}{\nu}\cdot\frac{\delta^3}{3} \tag{75}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\cdot Q\cdot\nu}{b\cdot g\cdot\sin\alpha}} \tag{76}$$

eingesetzt:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 0{,}003\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}436\cdot 10^{-4}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}}{0{,}5\mathrm{m}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}} \tag{77}$$

$$= 4{,}52\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \tag{78}$$

$$= 4{,}52\ \mathrm{mm} \tag{79}$$