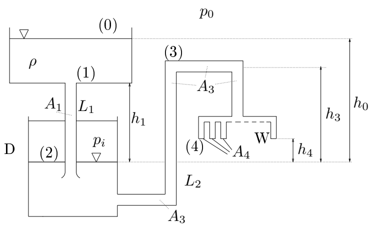
Tutorium

Aufgabe 65

Bestimme für das dargestellte System unter der Voraussetzung stationärer Verhältnisse

(a) den Innendruck p_i des Druckbehälters D,

(b) die maximal mögliche Anzahl von Entnahmestellen W unter der Bedingung, daß an keiner Stelle der Leitungen L_1 und L_2 Kavitation auftreten soll ($p \overset{!}{>} p_D$)!



Geg.: h_0, h_1, h_3, h_4, A_1, A_3, A_4, ρ, Umgebungsdruck p_0, Dampfdruck p_D, mit $h_4 < h_1 < h_3 < h_0$ und $\frac{A_1}{2} = A_3 = 10\,A_4$, Erdbeschleunigung g.

Die Bernoullische Gleichung für einen stationären Stromfaden lautet (z nach oben positiv):

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{konst.}, \qquad \text{(Bernoulli)}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\rho A v = \text{konst.} \qquad \text{(Konti)}$$

(a) Der Behälter D wird als so groß angenommen, daß das Wasser darin zur Ruhe kommt ($v_2 = 0$). Für einen Stromfaden von (0) nach (2) gilt mit (Bernoulli)

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} \tag{1}$$

mit $v_0 = v_2 = 0$ ergibt sich

$$p_i = p_2 = p_0 + \rho g(z_0 - z_2) \tag{2}$$

$$p_i = p_0 + \rho g h_0 \tag{3}$$

(b) Die größte Kavitationsgefahr besteht in einem Wasserrohr mit konstantem Querschnitt an der höchsten Stelle (bei Vernachlässigung der Reibung): Wegen Gleichung (Konti) ist v konstant und aus (Bernoulli) folgt dann: $p \sim -z + \text{konst}$.

Um den Druck im Rohr mit der Bernoullischen Gleichung (Bernoulli) auszurechnen, benötigen wir die Strömungsgeschwindigkeit v. Die ergibt sich aus dem Massenstrom $\rho A v$, der ja nach Kontinutätsgleichung (Konti) überall gleich sein muß. Bestimmt werden kann $\rho A v$ bei (4): $A = n \cdot A_4$, wobei n die Anzahl der Entnahmestellen ist. Die Geschwindigkeit v_4 ergibt sich mit (Bernoulli):

$$\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + 0 = \frac{p_4}{\rho} + gz_4 + \frac{v_4^2}{2} \tag{4}$$

$p_2 = p_i$ ist bekannt aus (a), $p_4 = p_0$ und $z_4 - z_2 = h_4$

$$v_4 = \sqrt{2g(h_0 - h_4)} \tag{5}$$

Es wird also der Druck an den Stellen (1) und (3) überprüft. Für (1) ergibt sich mit (Konti):

$$v_1 = \frac{nA_4}{A_1} v_4 \tag{6}$$

und mit (Bernoulli) und mit $\frac{A_4}{A_1} = \frac{1}{20}$

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + 0 = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} \tag{7}$$

$$p_1 = p_0 + \rho g(h_0 - h_1) - \rho g(h_0 - h_4)\frac{n^2}{400} \tag{8}$$

Für (3) ergibt sich analog:

$$v_3 = \frac{nA_4}{A_3} v_4 \tag{9}$$

$$p_3 = p_0 + \rho g(h_0 - h_3) - \rho g(h_0 - h_4)\frac{n^2}{100} \tag{10}$$

der Druck <u>p_3 ist niedriger als p_1, weil (3) höher liegt als (1) und</u> der <u>Querschnitt A_3 kleiner ist als A_1 und damit die Strömungsgeschwindigkeit v_3 größer als v_1</u>. Das kann an Gleichung (8) und (10) ablesen werden. Damit keine Kavitation auftritt, muß an den beiden kritischen Stellen (1) und (3) der Druck größer als der Dampfdruck p_D sein. Da $p_1 > p_3$ muß also gelten:

$$p_D < p_3 \Rightarrow n < 10\sqrt{\frac{\frac{1}{\rho g}(p_0 - p_D) + (h_0 - h_3)}{h_0 - h_4}} \tag{11}$$

Aufgabe 74

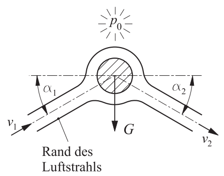
Ein Ball vom Gewicht G wird von einem Luftstrahl reibungsfrei umströmt und dadurch in der Schwebe gehalten. Der Strahl strömt unter dem Winkel α_1 mit der Geschwindigkeit v_1 an. Die Kompression der Luft in der Nähe des Balls kann ebenso vernachlässigt werden wie die Wirkung der Schwerkraft auf den Luftstrahl. Es soll keine horizontale Kraft vom Luftstrahl auf den Ball ausgeübt werden.

(a) Wie groß ist v_2 (Abströmgeschwindigkeit)?

(b) Wie groß ist der Abströmwinkel α_2?

(c) Welcher Massenstrom im Strahl ist erforderlich, damit der Ball schwebt?

Geg.: v_1, G, α_1, p_0



(a) <u>Bernoulli:</u>

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{12}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_2^2 \quad \Rightarrow |v_1| = |v_2| \tag{13}$$

(b) <u>Impulssatz</u> für einen Stromfaden:

$$\underline{F} = J(\underline{v_2} - \underline{v_1}), \quad J = \text{Massenstrom} \tag{14}$$

horizontale Komponente

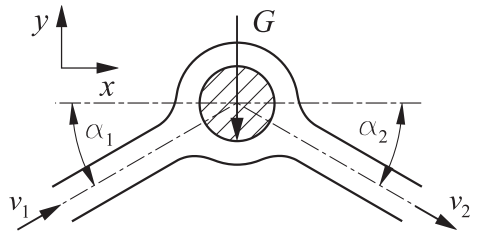
$$F_x = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \tag{15}$$

Annahme: keine Kraft in x-Richtung

$$0 = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \quad \Big| \; v_2 = v_1 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \tag{17}$$

(c) vertikale Komponente des Impulssatzes:



$$F_y = -G = J(-v_2 \sin\alpha - v_1 \sin\alpha) \tag{18}$$

mit $v_2 = v_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$:

$$J = \frac{G}{2v_1 \sin\alpha_1} \tag{19}$$

ist der erforderliche Massenstrom.

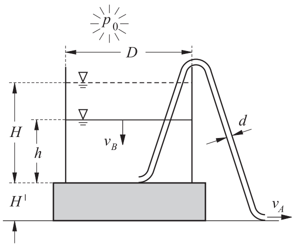
Hausaufgaben

Aufgabe 64

Auf einem Podest der Höhe $H' = 0,5$m steht ein großes Gefäß (Durchmesser $D = 1$m), welches bis zur Höhe $H = 1$m mit Wasser gefüllt ist (vgl. nebenstehende Skizze). Dieses Gefäß wird mit Hilfe eines Schlauches (Durchmesser $d = 1$cm) nach dem Heberprinzip entleert.

(a) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Wasseraustrittsgeschwindigkeit $v_A = f(h)$ am Schlauchende in Abhänigkeit von der veränderlichen Wasserhöhe h im Behälter?

(b) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Entleerungszeit T des Behälters?



Geg.: H, H', D, d, p_0

(a) Austrittsgeschwindigkeit v_A in Abhängigkeit vom Wasserstand h:

Aufgrund des großen Gefäßdurchmessers D ändert sich der Wasserstand h nur sehr langsam. Im gesamten System können daher die Strömungsgeschwindigkeiten wieder als annähernd konstant angesehen werden, sodaß ein quasistationärer Ansatz gewählt werden kann.

Stationäre, reibungslose Bernoulli-Gleichung von der Wasseroberfläche B bis zum Ausfluß A (Höhenform):

$$\frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_\mathrm{B}^2}{2g} + (H' + h) = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_\mathrm{A}^2}{2g} + 0 \tag{20}$$

Nach der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$v_\mathrm{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_\mathrm{A} \ll v_\mathrm{A} \tag{21}$$

Die Sinkgeschwindigkeit v_B des Wasserspiegels ist wieder sehr klein und somit in der Bernoulli-Gleichung gegenüber der Ausströmgeschwindigkeit v_A vernachlässigbar. Man erhält somit für v_A:

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{2g(H' + h)} \tag{22}$$

Ausflußformel von Torricelli.

(b) Entleerungszeit T:

Die Entleerungszeit bei reibungsloser Strömung erhält man durch Integration der Gleichung:

$$v_\mathrm{B} = -\frac{dh}{dt} \tag{23}$$

$$\Rightarrow T = \int_{t=0}^{T} dt = -\int_{h=H}^{0} \frac{1}{v_\mathrm{B}} dh = \int_{h=0}^{H} \frac{1}{v_\mathrm{B}} dh \tag{24}$$

Mit $v_\mathrm{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_\mathrm{A}$ und $v_\mathrm{A} = \sqrt{2g(H'+h)}$ erhält man:

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_{h=0}^{H} \frac{dh}{\sqrt{H' + h}} \tag{25}$$

$$= \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(2\sqrt{H' + h}\right)\Big|_0^H \tag{26}$$

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H' + H} - \sqrt{H'}\right) \tag{27}$$

Mit den Werten der Aufgabenstellung:

$$T = \left(\frac{1\text{m}}{0{,}01\text{m}}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{9{,}81\text{m/s}^2}} \tag{28}$$

$$\cdot \left(\sqrt{0{,}5\text{m} + 1\text{m}} - \sqrt{0{,}5\text{m}}\right) \tag{29}$$

$$T = 2337\text{s} \tag{30}$$

Aufgabe 67

Eine Rohrleitung unter einem Wasserbehälter mündet ins Freie (Umgebungsdruck p_0). Mit Hilfe einer düsenförmigen Verengung und einem Saugrohr soll aus einem unteren Reservoir Wasser gefördert werden (Höhendifferenz zur Düse h).

(a) Wie groß ist der Druck p_2 an der Stelle $\boxed{2}$ zwischen Saugrohr und Düse, wenn das Saugrohr mit stehendem (also ruhendem) Wasser gefüllt ist?

(b) Welcher Zusammenhang muss zwischen dem Druck p_1 und dem eben berechneten Druck p_2 gelten, damit das Wasser aus dem Saugrohr sogar in die Düse hineingesaugt wird? (Annahme $d \ll h$)

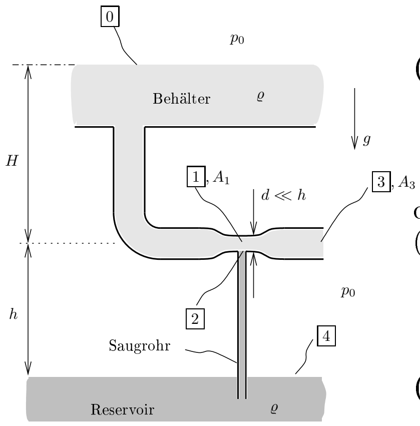
(c) Berechnen Sie mithilfe der Bernoulli-Gleichung $\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$ zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ den Druck p_1 an der Stelle $\boxed{1}$ abhängig von v_1 und v_3.

(d) Wie ist der Zusammenhang zwischen v_1 und v_3? (Massenbilanz, Kontinuitätsgleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$)

(e) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung nun noch zwischen $\boxed{0}$ und $\boxed{3}$.

(f) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche der Düse A_1, so dass Wasser angesaugt werden kann. Kontrollieren Sie die Einheiten in Ihrem Ergebnis.

Geg.: H, h, ρ, g, p_0, A_3.



(a) Der Druck p_2 an der Stelle $\boxed{2}$ ergibt sich aus der Bernoulligleichung zwischen $\boxed{4}$ und $\boxed{2}$. Die Flüssigkeit im Saugrohr ruht, der dynamische Druck an der Stelle $\boxed{2}$ ist also $q_2 = 0$ und der Druck ergibt sich zu

$$p_2 = p_0 - \rho g h \tag{31}$$

(Die Annahme aus Aufgabenteil **b)** $d << h$ fand hier schon Verwendung.)

(b) Damit Wasser aus dem Saugrohr in die Düse gesaugt wird muss ein Druckgefälle zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ bestehen. Aus der Annahme $d << h$ folgt, dass im gesamten Düsenquerschnitt $\boxed{1}$ der gleiche Druck p_1 herrscht. Als Bedingung ergibt sich also

$$p_1 < p_2 \tag{32}$$

(c) Der Druck an der Stelle $\boxed{3}$ ist der Umgebungsdruck $p_3 = p_0$ (Freistrahl). Die Bernoulligleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ lautet daher

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} v_3^2$$

daraus folgt für den Druck an der Stelle $\boxed{1}$

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_3^2 - v_1^2\right) \tag{33}$$

(d) Die Kontigleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ stellt den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten v_1 und v_3 her.

$$v_1 A_1 = v_3 A_3$$

daraus ergibt sich die Geschwindigkeit an der Stelle $\boxed{1}$

$$v_1 = \frac{A_3}{A_1} v_3 \tag{34}$$

(e) Die Bernoulligleichung zwischen $\boxed{0}$ und $\boxed{3}$ lautet

$$p_0 + \rho g H = p_0 + \frac{\rho}{2} v_3^2$$

daraus ergibt sich die Geschwindigkeit an der Stelle $\boxed{3}$ (siehe auch Torricelli)

$$v_3 = \sqrt{2gH} \tag{35}$$

(f) Setzt man nun (35) in (34) ein so erhält man

$$v_1 = \frac{A_3}{A_1}\sqrt{2gH}$$

Dies und (35) in (33) eingesetzt ergibt

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(\left[\sqrt{2gH}\right]^2 - \left[\frac{A_3}{A_1}\sqrt{2gH}\right]^2\right)$$

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2\right) 2gH$$

$$p_1 = p_0 + \left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2\right)\rho g H \tag{36}$$

Gleichungen (36) und (31) stellen die beiden Seiten von (32) dar. Eingesetzt ergibt

$$p_0 + \left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2\right)\rho g H < p_0 - \rho g h$$

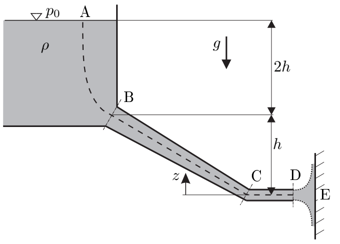
$$-\left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2 < -\frac{h}{H} - 1$$

$$A_3^2 \overset{!}{>} A_1^2\left(\frac{h}{H} + 1\right)$$

$$A_3 > A_1\sqrt{\frac{h}{H} + 1} \Longleftrightarrow \underline{\underline{A_1 < A_3\sqrt{\frac{H}{H+h}}}}$$

$$[A_1] = \text{m}^2 = [A_3]$$

Aufgabe 76



Aus dem Abflussrohr eines großen Behälters trifft Wasser auf eine Wand.
Das Abflussrohr besitzt einen kreisförmigen Querschnitt. Der Querschnittsradius r verkleinert sich entlang der Rohrlänge linear von $r(z = h) = 2R$ bei B auf $r(z = 0) = R$ bei C. Zwischen C und D ist der Querschnitt konstant.
Die Querschnittsfläche des Abflussrohres ist im Vergleich zur freien Wasserfläche im Behälter vernachlässigbar klein. Außerdem ist auch der Radius r des Rohres gegenüber der Höhe h vernachlässigbar klein. Das Wasser kann als ideales Fluid und die Strömung als stationär betrachtet werden.
Gegeben: g, ρ, p_0, h, R

(a) Geben Sie den Wasserdruck $p(z)$ im Behälter in Abhängigkeit der Koordinate z an. Wie groß ist der Wasserdruck am Behälterboden (Tiefe $2h$)?

(b) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit $v(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(c) Ermitteln Sie den Druckverlauf $p(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(d) Welche Kraft übt der Wasserstrahl bei E auf die Wand aus?

Hinweis: Überlegen Sie bei (b) und (c) zunächst, wie groß Strömungsgeschwindigkeit und Druck an den Stellen D und C sind.

(a) Hydrostatik:

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) \tag{37}$$

am Behälterboden herrscht der Druck

$$p(z = h) = p_0 + 2\rho gh \tag{38}$$

(b) Radius des Abflussrohres zwischen B und C:

$$r(z) = R + \frac{R}{h}z \tag{39}$$

Querschnittsfläche zwischen B und C:

$$A(z) = \pi r(z)^2 = \pi(R + \frac{R}{h}z)^2 \tag{40}$$

Die Geschwindigkeit an der Rohröffnung wird mit der Ausflussformel von Toricelli (alternativ: Bernoulli A-D) bestimmt:

$$v_\mathrm{D} = \sqrt{6gh} \tag{41}$$

und aus der Kontinuitätsgleichung folgt unmittelbar

$$v_\mathrm{C} = v_\mathrm{D} = \sqrt{6gh}. \tag{42}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung kann nun die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C berechnet werden:

$$\begin{aligned} A(z)v(z) &= A_\mathrm{C} v_\mathrm{C} && (43)\\ \Leftrightarrow v(z) &= \frac{\pi R^2}{\pi\left(R + \frac{R}{h}z\right)^2}\sqrt{6gh} \\ v(z) &= \frac{\sqrt{6gh}}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^2}. && (44) \end{aligned}$$

(c) An der Rohröffnung ist der Druck in der Flüssigkeit gleich dem Außendruck und aus der Bernoulligleichung folgt mit (42):

$$p_\mathrm{C} = p_\mathrm{D} = p_0. \tag{45}$$

Der Druck in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C kann nun ebenfalls mit der Bernoulligleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} p(z) + \frac{\rho}{2}v(z)^2 + \rho gz &= p_\mathrm{C} + \frac{\rho}{2}v_\mathrm{C}^2 + 0 && (46)\\ \Leftrightarrow p(z) &= p_0 - \rho gz + \frac{\rho}{2}(v_\mathrm{C}^2 - v(z)^2) \\ &= p_0 - \rho gz + \frac{\rho}{2}\left[6gh - \frac{6gh}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4}\right] \\ p(z) &= p_0 + \rho g(3h - z) - \frac{3\rho gh}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4} && (47) \end{aligned}$$

(d) Die Kraft auf die Wand wird mit dem Impulssatz berechnet. Dazu wird zunächst der Massenstrom bestimmt:

$$\begin{aligned} J_\mathrm{D} &= \rho A_\mathrm{D} v_\mathrm{D} && (48)\\ &= \pi\rho R^2\sqrt{6gh} && (49) \end{aligned}$$

Der Impulssatz liefert die Kraft auf die Flüssigkeit:

$$\begin{aligned} F_F &= J_\mathrm{D}(v_\mathrm{E} - v_\mathrm{D}) \quad \text{mit } v_\mathrm{E} = 0 \\ &= -6\pi\rho ghR^2. && (50) \end{aligned}$$

Die Kraft auf die Wand hat den gleichen Betrag, ist jedoch entgegen gesetzt gerichtet. Also übt der Wasserstrahl die Kraft

$$F = -F_F = 6\pi\rho ghR^2 \tag{51}$$

auf die Wand aus.