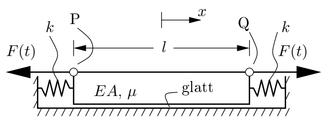
# Tutorium

## Aufgabe 40

Ein Dehnstab (Dehnsteifigkeit $EA$, Massebelegung $\mu = \rho A$, Länge $l$) stützt sich an seinen beiden Enden ($x = -\frac{l}{2}$ und $x = \frac{l}{2}$) über Federn (Federsteifigkeit $k$) an der Umgebung ab. In der Ruhelage sind die Federn entspannt. An den Punkten P und Q greifen entgegengesetzt wirkende Kräfte mit dem Betrag $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an. Die Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes im eingeschwungenen Zustand sind zu untersuchen.




(a) Wie lautet die die Längsschwingungen beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

(b) Wie lauten die Randbedingungen? *Beachten Sie bitte den Ursprung der Koordinate x!*

(c) Bestimmen Sie nun die Lösung $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

(d) Für welche Erregerkreisfrequenzen $\Omega$ bewegt sich der Punkt Q nicht?

Geg.: $F_0$, $\Omega$, $EA$, $\mu$, $l$

**(a)** Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \tag{1}$$

beschreibt die Längsschwingungen des untersuchten Stabes.

**(b)** Die Randbedingungen erhält man durch geeignete Schnitte am linken und rechten Rand:

$$0 = N\left(-\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(-\frac{l}{2}, t\right) - F(t) \tag{2a}$$

$$0 = -N\left(\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(\frac{l}{2}, t\right) + F(t) \tag{2b}$$

Für die Normalkraft $N(x,t)$ gilt der Zusammenhang

$$N(x,t) = EA\frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

der aus dem Werkstoffgesetz und der Kinematik hergeleitet werden kann.

**(c)** Zur Berechnung der Längsschwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung der DGL. Ansatz:

$$u_p(x,t) = X(x) \cos \Omega t \quad .$$

Die Systemantwort gehorcht also dem gleichen Zeitgesetz, wie die Anregung (Gleichtaktansatz).

Dieser Produktansatz überführt die partielle Differentialgleichung (1) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{\Omega}{c} \quad . \tag{3}$$

Die Lösung von (3) lautet bekanntlich

$$X = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x \quad . \tag{4}$$

Die Randbedingungen (2) kann man nun für die Ortsfunktion formulieren

$$0 = EAX'\left(-\frac{l}{2}\right) - kX\left(-\frac{l}{2}\right) - F_0 \tag{5a}$$

$$0 = -EAX'\left(\frac{l}{2}\right) - kX\left(\frac{l}{2}\right) + F_0 \tag{5b}$$

Einsetzen von (4) in die Randbedingungen (5) ergibt mit der Abkürzung $\xi = \frac{\lambda l}{2}$ unter Ausnutzung von $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$F_0 = EA\lambda\left(\alpha \sin\xi + \beta\cos\xi\right) - k\left(\alpha\cos\xi - \beta\sin\xi\right)$$

$$F_0 = EA\lambda\left(-\alpha \sin\xi + \beta\cos\xi\right) + k\left(\alpha\cos\xi + \beta\sin\xi\right)$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\alpha$ und $\beta$. Durch Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichungen erhält man unmittelbar die Forderungen, die an $\alpha$ und $\beta$ für alle Zeiten gestellt werden:

$$\alpha = 0 \quad ,$$

$$\beta = \frac{F_0}{EA\lambda \cos\frac{\lambda l}{2} + k \sin\frac{\lambda l}{2}} \quad .$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich nun durch Einsetzen der berechneten Konstanten $\alpha$ und $\beta$

$$u_p(x,t) = \frac{F_0 \sin\lambda x}{EA\lambda\cos\frac{\lambda l}{2} + k\sin\frac{\lambda l}{2}} \cos\Omega t \quad , \tag{7}$$

mit

$$\lambda = \frac{\Omega}{c} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad .$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition dieser partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bei reellen Systemen existiert stets eine Dämpfung (auch wenn diese im vorliegenden Modell nicht abgebildet ist). Daher klingt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ab und nach genügend langer Zeit (=eingeschwungener Zustand) verbleibt allein die partikuläre Lösung. Somit beschreibt (7) das Verhalten das Systems im eingeschwungenen Zustand. Der Verlauf der Verschiebung ist sinusförmig und oszilliert mit $\Omega$. Die Amplitude hängt von Systemgrößen wie $k$ und $EA$, aber auch von der Abstimmung der Erregung auf die Systemgrößen ab.

**(d)** Der Punkt Q bewegt sich nicht, wenn

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\left(\frac{l}{2},t\right)} = 0$$

für alle Zeiten $t$. D.h.

$$\sin\frac{\lambda l}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \frac{2n\pi c}{l} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

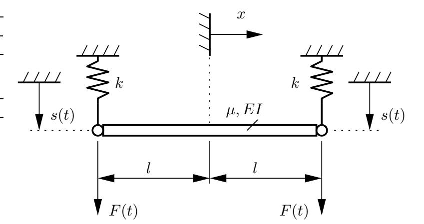
Für diese Frequenzen ist der Nenner der Ortsfunktion ungleich 0.

## Aufgabe 52

Ein Balken (Länge $2l$, Massebelegung $\mu$, Biegesteifigkeit $EI$) ist an beiden Enden an Federn (Steifigkeit $k$) aufgehängt. An den Endpunkten werden die Bewegungen $s(t) = \hat{s}\cos\Omega t$ durch geeignete Kräfte $F(t)$ erzwungen.

(a) Gib die partielle Differentialgleichung und die Randbedingungen für kleine Biegeschwingungen $w(x,t)$ des Balkens an.

(b) Bestimme die Balkenschwingungen $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.




Geg.: $\mu$, $EI$, $l$, $k$, $\hat{s}$, $\Omega$

**(a)** Kleine Biegeschwingungen des Balkens werden durch die partielle Differentialgleichung

$$EI \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

beschrieben. Die Randbedingungen sind für den betrachteten Balken

$$\begin{aligned} w(-l,t) &= \hat{s}\cos(\Omega t) \quad , \\ w(l,t) &= \hat{s}\cos(\Omega t) \quad , \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(-l,t)} &= 0 \quad , \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(l,t)} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Die ersten beiden Randbedingungen tragen der erzwungenen Bewegung Rechnung. Die letzten beiden Randbedingungen beschreiben die momentenfreien Ränder.

**(b)** Für den eingeschwungenen Zustand wird eine partikuläre Lösung des Randwertproblems (8), (9) gesucht. Man setzt

$$w(x,t) = W(x) \cdot \cos(\Omega t) \tag{10}$$

an.

Einsetzen von (10) in (8) führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$W^{(4)} - \kappa^4 W = 0 \quad mit \quad \kappa^4 = \frac{\mu \Omega^2}{EI}. \tag{11}$$

Die allgemeine Lösung von (11) lautet

$$W(x) = C_1\cos(\kappa x) + C_2\sin(\kappa x) + C_3\cosh(\kappa x) + C_4\sinh(\kappa x), \tag{12}$$

wie man durch einen $e^{\lambda x}$ - Ansatz herleiten kann. Einsetzen von (12) in die Randbedingungen (2) führt auf ein Gleichungssystem für die vier Unbekannten $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$:

$$\begin{bmatrix} \cos(\kappa l) & -\sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & -\sinh(\kappa l) \\ \cos(\kappa l) & \sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & \sinh(\kappa l) \\ -\cos(\kappa l) & \sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & -\sinh(\kappa l) \\ -\cos(\kappa l) & -\sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & \sinh(\kappa l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösen ergibt

$$\begin{aligned} C_2 &= C_4 = 0 \quad , \\ C_1 &= \tfrac{\hat{s}}{2\cos(\kappa l)} \quad , \\ C_3 &= \tfrac{\hat{s}}{2\cosh(\kappa l)} \quad . \end{aligned} \tag{13}$$

Die Balkenschwingung im eingeschwungenen Zustand wird demnach durch

$$w(x,t) = \frac{\hat{s}}{2}\left(\frac{\cos(\kappa x)}{\cos(\kappa l)} + \frac{\cosh(\kappa x)}{\cosh(\kappa l)}\right)\cos(\Omega t) \tag{14}$$

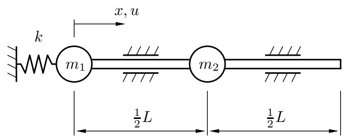
beschrieben.

# Hausaufgaben

## Aufgabe 43

Ein schwingungsfähiges System wird durch das skizzierte Modell aus zwei Dehnstäben (Dehnsteifigkeit $EA$, Massenbelag $\rho A$) mit Massenpunkten (Masse $m_1$, $m_2$) und einer idealen Feder (Steifigkeit $k$) beschrieben.

Geg.: $L$, $k$, $m_1$, $m_2$, $E$, $\rho$, $A$




(a) Geben Sie die Bewegungsgleichung(en) des skizzierten Systems und die dazugehörigen Rand- und Übergangsbedingungen an.

Im folgenden wird ein Spezialfall betrachtet, der auf folgende Bewegungsdifferentialgleichung und Randbedingungen führt:

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t)\ , \quad u(x=0,t) = 0\ , \quad u'(x=L,t) = 0$$

(b) Was für ein Spezialfall ist das? Welchen Werten müssen die Massen der zwei Massenpunkte für diesen Spezialfall zustreben? (Der Wert für $k$ soll hierbei nicht eingegrenzt werden.) Geben Sie $c$ in gegebenen Größen an!

(c) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen für den Spezialfall.

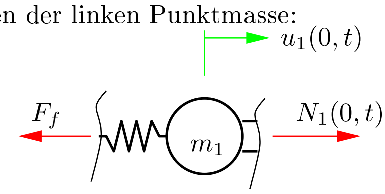
(d) Das System (Spezialfall) soll am rechten Ende ($x = L$) mit einer Kraft angeregt werden. Die Amplitude der Kraft beträgt $\hat{F}$, die Schwingungsperiode $T$. Berechnen Sie die Schwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

**(a)** Für die Verschiebung $u_1(x)$ im Bereich $0 < x < \frac{L}{2}$ und die Verschiebung $u_2(x)$ im Bereich $\frac{L}{2} < x < L$ gelten die folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{u}_1 = c^2 u_1''\ , \quad \ddot{u}_2 = c^2 u_2'' \tag{15}$$

$$\text{mit} \quad c^2 := \frac{E}{\rho} \tag{16}$$

Am linken Rand ergibt sich die Randbedingung durch Freischneiden der linken Punktmasse:




Das zweite NEWTONsche Gesetz liefert:

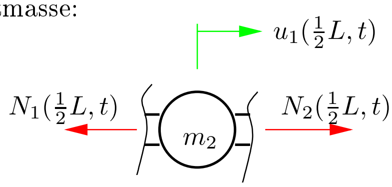
$$m_1\ddot{u}_1(0,t) = -F_f + N_1(0,t) = -ku_1(0,t) + EAu_1'(0,t) \tag{17}$$

In der Mitte ergeben sich zwei Übergangsbedingungen: (Wir verwenden eine durchgehende $x$-Koordinate für beide Bereiche.)

Erstens muß die Verschiebung auf beiden Seiten der Punktmasse gleich sein:

$$u_1(\frac{1}{2}L,t) = u_2(\frac{1}{2}L,t) \tag{18}$$

Zweitens gilt das zweite NEWTONsche Gesetz für die mittlere Punktmasse:



$$m_2\ddot{u}_1\big(\frac{1}{2}L,t\big) = N_2\big(\frac{1}{2}L,t\big) - N_1\big(\frac{1}{2}L,t\big) \tag{19}$$

$$= EA\left(u_2'\big(\frac{1}{2}L,t\big) - u_1'\big(\frac{1}{2}L,t\big)\right) \tag{20}$$

Am rechten (freien) Ende muß die Normalkraft verschwinden:

$$0 = N_2(L,t) = EAu_2'(L,t) \tag{21}$$

**(b)** Das angegebene Randwertproblem beschreibt den Spezialfall

$$m_1 \to \infty \,\text{oder}\, k \to \infty \tag{22}$$
$$m_2 \to 0$$

$c$ hat wie oben den Wert $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

**(c)** allg. Lösung für die Ortsfunktion $X$ im Separationsansatz $u(x,t) = X(x)\cos\omega t$:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x\;,\;\lambda = \frac{\omega}{c} \tag{23}$$

Erste Randbed. transformiert für die Ortsfunktion und ausgewertet:

$$X(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad A = 0 \tag{24}$$

Zweite Randbedingung ebenso:

$$X'(L) = 0 \quad\Rightarrow\quad B\lambda\cos\lambda L = 0 \tag{25}$$

ergibt (außer der Lösung $\lambda = \omega = 0 \Rightarrow$ keine Schwingung):

$$\lambda L = \pi(n-\frac{1}{2}) \quad\Rightarrow\quad \omega_n = \pi(n-\frac{1}{2})\frac{c}{L}\;,\quad n = 1,2,3,\dots \tag{26}$$

**(d)** Ansatz vom Typ der rechten Seite, wegen fehlender Dämpfung ohne Phasenverschiebung:

$$u(x,t) = X(x)\cos\Omega t \quad \text{mit}\; \Omega := \frac{2\pi}{T} \tag{27}$$

Allg. Lösung für die Ortsfunktion $X$:

$$X(x) = A\cos\frac{\Omega}{c}x + B\sin\frac{\Omega}{c}x \tag{28}$$

und mit der unveränderten Randbedinung am linken Rand wieder:

$$X(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad A = 0 \tag{29}$$

$$\hookrightarrow \quad X(x) = B\sin\frac{\Omega}{c}x \tag{30}$$

Neue Randbedingung am rechten Rand:

$$N(L,t) = EAu'(L,t) = \hat{F}\cos\Omega t \tag{31}$$

Die Konstante $B$ wird aus der zweiten Randbedingung (31) bestimmt:

$$\hat{F} = EAX'(L) = EA\,B\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}L \tag{32}$$

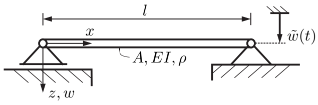
$$B = \hat{F}\frac{c}{EA\,\Omega\cos\frac{\Omega}{c}L} \tag{33}$$

$$u(x,t) = \hat{F}\frac{c\sin\frac{\Omega}{c}x}{EA\Omega\cos\frac{\Omega}{c}L}\cos\Omega t \tag{34}$$

$$= \frac{\hat{F}}{A\sqrt{E\rho}}\frac{\sin\frac{\Omega}{c}x}{\Omega\cos\frac{\Omega}{c}L}\cos\Omega t \tag{35}$$

## Aufgabe 46

Der skizzierte massebehaftete Balken wird durch eine periodische Auslenkung $\tilde{w}(t)$ des rechten Lagers in Biegeschwingungen versetzt. Die Schwerkraft wird dabei vernachlässigt.
Geg.: $A, EI, \rho, l, \tilde{w}(t) = w_0\sin\Omega t$




(a) Zeigen Sie an einem infinitesimal kleinen Stück des Balkens, dass die Biegeschwingung für den Euler-Bernoulli-Balken durch die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + {c_B}^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstante $c_B$.

(b) Formen Sie die Differentialgleichung mit einem Bernoulli-Ansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen um und geben Sie deren allgemeine Lösungen an.

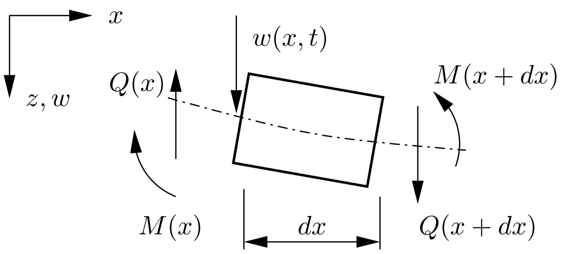
(c) Formulieren Sie die geometrischen und die dynamischen Randbedingungen.

(d) Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.

(e) Ermitteln Sie die Kreisfrequenzen $\Omega_R$, bei denen Resonanz auftritt.

Hinweis: Der Hyperbelsinus ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend und hat eine Nullstelle bei Null.

**(a)**




Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx) - Q(x) \tag{36}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $\frac{Q(x+dx)-Q(x)}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ergibt sich

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{37}$$

Wegen $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ (Drehträgheit des infitesimalen Balkenelements vernachlässigbar) und dem Materialgesetz $M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes $\rho$, $A$, $E$, $I$ die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_B^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \text{mit} \quad c_B := \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{38}$$

Das war zu zeigen.

**(b)** Mit dem Separationsansatz nach Bernoulli

$$w(x,t) = X(x)\cdot T(t) \tag{39}$$

ergeben sich die beiden gewöhnlichen DGL

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \text{und} \tag{40}$$

$$X'''' - \lambda^4 X = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda := \sqrt{\frac{\omega}{c_B}}. \tag{41}$$

Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (40) und (41) werden mit einem Exponentialansatz gelöst. Es ergeben sich die allgemeinen Lösungen

$$T(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t \quad \text{und} \tag{42}$$

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\cosh\lambda x + D\sinh\lambda x \tag{43}$$

mit den unbekannten Koeffizienten $A, \ldots, D, U, V$.

**(c)** Die Randbedingungen des Balkens sind:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$w''(x=0,t) = 0 \tag{RB 2}$$

$$w(x=l,t) = w_0 \sin\omega t \tag{RB 3}$$

$$w''(x=l,t) = 0 \tag{RB 4}$$

**(d)** Im eingeschwungenen Zustand schwingt der Balken mit der Frequenz der äußeren Anregung. Da es auf die Phasenverschiebung nicht ankommt, lässt sich die Zeitfunktion annehmen zu

$$T(t) = \sin\Omega t. \tag{44}$$

Durch Auswertung der Randbedingungen (RB 1) und (RB 2) folgt unmittelbar

$$\text{(RB 1):} \quad A + C = 0 \tag{45}$$

$$\text{(RB 2):} \quad -A + C = 0. \tag{46}$$

Daher muss gelten $A = C = 0$ und die Ortsfunktion vereinfacht sich zu

$$X(x) = B\sin\lambda x + D\sinh\lambda x \tag{47}$$

Des Weiteren ergibt die Auswertung der Randbedingungen (RB 3) und (RB 4):

$$\text{(RB 3):} \quad -B\sin\lambda l + D\sinh\lambda l = 0 \tag{48}$$

$$\text{(RB 4):} \quad B\sin\lambda l + D\sinh\lambda l = w_0. \tag{49}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (48) und (49) lassen sich die verbleibenden Koeffizienten der Ortsfunktion bestimmen:

$$D = \frac{w_0}{2\sinh\lambda l} \quad \text{und} \tag{50}$$

$$B = \frac{w_0}{2\sin\lambda l}. \tag{51}$$

Somit lautet die Ortsfunktion

$$X(x) = \frac{w_0}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda l}\right). \tag{52}$$

und die Durchbiegung ist

$$w(x,t) = \frac{w_0}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda l}\right)\sin\Omega t. \tag{53}$$

**(e)** Gleichung (53) lässt sich umformen zu

$$w(x,t) = \frac{\frac{w_0}{2}(\sinh\lambda l\sin\lambda x + \sin\lambda l\sinh\lambda x)\sin\Omega t}{\sin\lambda l\sinh\lambda l} \tag{54}$$

Im Resonanzfall wächst die Amplitude über alle Grenzen. Das ist der Fall, wenn die Erregerfrequenz $\Omega$ gerade eine Polstelle von Gleichung (54) ist , also wenn

$$\sin\lambda l\sinh\lambda l = 0 \tag{55}$$

gilt. Da der Hyperbelsinus seine einzige Nullstelle bei Null hat, führt das auf die Bestimmungsgleichung

$$\sin\lambda l = 0 \quad \text{also} \tag{56}$$

$$\Leftrightarrow \lambda l = k\pi, k \in \mathbb{N} \tag{57}$$

$$\Leftrightarrow \Omega_R = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{58}$$