Lösung der Wellengleichung mit dem Ansatz von D'Alembert

Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine lineare, homogene, partielle Differentialgleichung.

$$\ddot{w} = c^2 w'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

$w(x,t)$	allg. Verschiebung in z-Richtung, hier Auslenkung der Saite
c	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, hier $c^2 = \frac{S}{\mu}$
S	Zugkraft, Vorspannkraft der Saite
$\mu = \rho A$	Massenbelegung der Saite

D'Alembertsche Lösung

Die D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung lautet

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{2}$$

Die allgemeine Form der (zunächst beliebigen) Funktionen f_1 und f_2 können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.
Für eine Saite kommen zwei Sorten von Randbedingungen in Betracht:

$w(\text{Rand}) = 0$	fester Rand
$w'(\text{Rand}) = 0$	freier Rand

Um einen **festen** Rand zu realisieren, wird die einlaufenden Welle mit einer Welle gleicher Form, aber **entgegengesetzer** Richtung und **negativem** Vorzeichen überlagert.

Um einen **freien** Rand zu realisieren, wird die einlaufenden Welle mit einer Welle gleicher Form, aber **entgegengesetzer** Richtung und **gleichem** Vorzeichen überlagert.