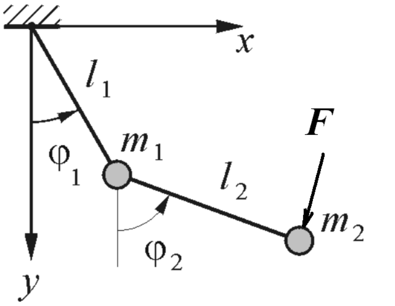
Aufgabe 1. (Berechnung von generalisierten Kräften). Gegeben ist ein Doppelpendel. Als generalisierte Koordinaten wählen wir Winkel φ_1 und φ_2. Auf den zweiten Körper wirkt eine nicht konservative Kraft $\vec{F}$. Der Betrag der Kraft $\vec{F}$ ist konstant, die Wirkungslinie ist stets senkrecht zum zweiten Pendelstab. Zu bestimmen sind die mit der Kraft $\vec{F}$ zusammenhängenden generalisierten Kräfte Q_{φ_1} und Q_{φ_2}.



Lösung: Die Kraft $\vec{F} = \left(-F\cos\varphi_2, F\sin\varphi_2\right)$ wirkt auf den zweiten Körper und leistet Arbeit bei seinen Verschiebungen. Koordinaten des zweiten Körpers sind

$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$,

$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$.

Kleine Änderungen von generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 führen zu Änderungen von Koordinaten x_2 und y_2:

$\delta x_2 = l_1 \cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \delta\varphi_2$

$\delta y_2 = -l_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 \delta\varphi_2$,

was bedeutet, daß der zweite Körper sich um den Vektor $\delta\vec{r}_2 = \left(\delta x_2, \delta y_2\right)$ verschiebt. Die Arbeit der Kraft $\vec{F} = \left(-F\cos\varphi_2, F\sin\varphi_2\right)$ auf dieser Verschiebung ist gleich

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_2 =$$

$$-F\cos\varphi_2\left(l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2\right) +$$

$$+F\sin\varphi_2\left(-l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2\right) =$$

$$= -F\begin{bmatrix} l_1\left(\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1\right)\delta\varphi_1 + \\ l_2\left(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2\right)\delta\varphi_1 \end{bmatrix} =$$

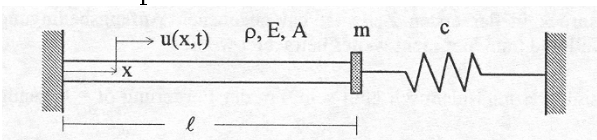
$$-F\left(l_1\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\delta\varphi_1 + l_2\delta\varphi_2\right)$$

Die generalisierten Kräfte sind demnach gleich:

$Q_{\varphi_1} = -Fl_1\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$

$Q_{\varphi_2} = -Fl_2$.

Aufgabe 2. Gegeben sei der skizzierte Stab. An seinem freien Ende sind eine Masse und eine Feder angeheftet. Bei nicht gedehntem Stab sei die Feder entspannt. Schreiben Sie die Lagrangefunktion des Systems und berechnen Sie die Eigenfrequenz des Systems mit einem passenden Ritz-Ansatz!



Lösung: Die Lagrangefunktion ist:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{u}^2(l,t) - \frac{1}{2}cu^2(l,t) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot{u}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l AEu'^2\, dx$$

Der einfachste brauchbare Ansatz für einen Stab ist ein (als Funktion von x) linearer Ansatz: $u(x,t) = a(t)(c_0 + x/l)$. Die Randbedingung $u(0) = 0$ ergibt $c_0 = 0$, somit $u(x,t) = a(t)x/l$.

Die für die Berechnung der Lagrangefunktion erforderlichen Werte bzw. Funktionen sind:

$\dot{u}(l,t) = \dot{a}(t)$, $\quad u(l,t) = a(t)$

$\dot{u}(x,t) = \dot{a}(t)x/l$, $\quad u'(x,t) = a(t)/l$.

Daraus ergibt sich die Lagrangefunktion

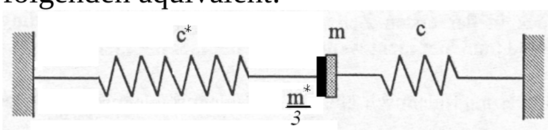
$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{a}^2 - \tfrac{1}{2}ca^2 +$$

$$+\frac{1}{2l^2}\int_0^l \rho A\dot{a}^2x^2dx - \frac{1}{2l^2}\int_0^l AEa^2dx$$

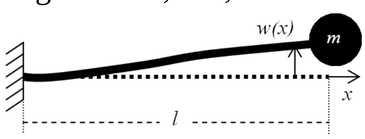
Oder

$$L = \tfrac{1}{2}\left(m + \tfrac{1}{3}\rho Al\right)\dot{a}^2 - \tfrac{1}{2}\left(c + {}^{AE}\!/_{l}\right)a^2.$$

Unter Berücksichtigung der Tatsachen, daß $m^* = \rho Al$ die Masse und $c^* = {}^{AE}\!/_{l}$ die Steifigkeit des Stabes ist, ist unser System dem folgenden äquivalent:



Aufgabe 3. Berechne mit einem passenden Ritz-Ansatz die erste Eigenfrequenz einer auf einer Blattfeder schwingenden Masse *m*. Gegeben: m, EI, l.



<u>Lösung:</u> Die Lagrangefunktion ist in diesem Fall

$$L=\frac{1}{2}m\dot{w}^2(l,t)+\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot{w}^2dx-\frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2dx\,.$$

Da jetzt zwei geometrische Randbedingungen am linken Ende ($w(0,t)=0$ und $w'(0,t)=0$) erfüllt sein müssen, ist der minimale Ansatz eine kubische Funktion. Dynamische Randbedingungen am rechten Ende müssen nicht unbedingt erfüllt sein. Jedoch bekommt man bessere Ergebnisse, wenn man auch die dynamischen Randbedingungen berücksichtigt. In diesem Fall die Momentenfreiheit $w''(l,t)=0$. Ein nichttrivialer Ansatz ist demnach eine Funktion vierter Ordnung, die wir in der folgenden Form schreiben:

$$w(x,t)=a(t)\left(c_0+c_1x+c_2x^2+x^3/2l^3\right).$$

Aus den Randbedingungen ergibt sich $c_0=0$, $c_1=0$, $2c_2+3/l^2=0\Rightarrow c_2=-1.5/l^2$. Der Ansatz ist demnach

$$w(x,t)=a(t)\left(0.5\frac{x^3}{l^3}-1.5\frac{x^2}{l^2}\right).$$

$$w(l,t)=-a(t)\,.$$

Die zur Berechnung der potentiellen Energie erforderliche zweite Ableitung ist gleich

$$w''(x,t)=\frac{3a(t)}{l^2}\left(\frac{x}{l}-1\right).$$

Für die Lagrangefunktion ergibt sich zu

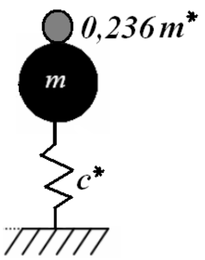
$$L=\frac{1}{2}m\dot{a}^2(l,t)+\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot{a}^2(t)\left(0.5\frac{x^3}{l^3}-1.5\frac{x^2}{l^2}\right)^2dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l EI\,\frac{9a^2(t)}{l^4}\left(\frac{x}{l}-1\right)^2dx$$

Oder

$$L=\frac{1}{2}\left(m+\rho Al\frac{33}{140}\right)\dot{a}^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3EI}{l^3}\right)a^2$$

Unter Berücksichtigung der Tatsachen, daß $m^*=\rho Al$ die Masse und $c^*=\dfrac{3EI}{l^3}$ die Steifigkeit des Blattfeder ist, ist unser System dem folgenden äquivalent (Bild rechts).



Die Eigenfrequenz ist gleich

$$\omega=\sqrt{\frac{c^*}{m+0.236m^*}}\,.$$

III. Was man alles zur schriftlichen Klausur wissen muß?

1) Was ist Lagrangefunktion?

2) Generalisierte Koordinaten

3) Kinetische Energie bei Translation und Rotation

4) Potentielle Energie in Standardsituationen (Feder, Gewicht)

5) Lagrangegleichungen 1. und 2. Art

6) Bindungen

7) Das Prinzip der virtuellen Arbeit (oder der virtuellen Verschiebungen)

8) Generalisierte Kräfte und ihre Berechnung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit

9) Dissipationsfunktion und ihre Benutzung zur Aufstellung von Bewegungsdifferentialgleichungen.

10) Kinetische und potentielle Energien für Dehnstab, Torsionsstab, Biegebalken (alles auswendig):
(a) als Funktion von Auslenkungen und Verdrehungen
(b) potentielle Energie darüber hinaus auch als Funktion von Momenten und Schnittkräften.

11) Kinetische und potentielle Energie von Kombinationen aus kontinuierlichen und diskreten Elementen

12) Der 2. Satz von Castigliano

13) Berechnung von Durchbiegungen mit dem Satz von Castigliano an den Stellen, wo keine Kräfte wirken

14) Näherungsmethoden:
(a) Ritz-Ansatz. Wie wählt man Ansatzfunktionen?
(b) Rayleigh-Ritz-Verfahren zur Bestimmung von Eigenfrequenzen

15) Bedingungen für das Gleichgewicht und seine Stabilität bzw. Instabilität

16) Definition der Einflußzahlen; Vertauschungssatz von Maxwell und Betti

<u>Sehr wichtig:</u>

Eine der Klausuraufgaben ist eine der Hausaufgaben. Mann sollte *alle Hausaufgaben* selbst (am besten mehrmals) durchgerechnet haben!