I. Rayleigh-Ritz Verfahren zur Bestimmung von Eigenfrequenzen.

Beispiel 1. *Zu bestimmen ist die kleinste Eigenfrequenz einer Saite.*

Mit Hilfe eines eingliedrigen Ansatzes $u = a(t)\psi(x)$ erhalten wir die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{\dot{a}^2}{2}\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx - \frac{a^2}{2}S\int_0^l \psi'^2(x)dx .$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{a}\cdot\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx + a\cdot S\int_0^l \psi'^2(x)dx = 0 .$$

Das ist eine Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{S\int_0^l \psi'^2(x)dx}{\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx} \quad (\textit{Rayleigh-Quotient}).$$

Wenn wir $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ wählen, dann ist

$$\omega^2 = \frac{S\frac{1}{2}l\left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\rho A\frac{1}{2}l} = \frac{S}{\rho A}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 .$$

Das ist das *exakte* Ergebnis für die kleinste Eigenfrequenz der Saite, da wir als Ansatzfunktion die exakte Eigenform genommen haben. Nehmen wir $\psi(x) = x(l-x)$, so bekommen wir $\omega^2 = \frac{S}{\rho A}\frac{10}{l^2}$, was etwa 1,3% über dem exakten Wert liegt.

Die Näherung ist immer größer als die erste Eigenfrequenz.

Mit einem zweigliedrigen Ansatz

$\psi(x) = x(l-x) + ax^2(l-x)^2$

erhalten wir für den *Rayleigh*-Quotienten

$$\omega^2 = \frac{S\int_0^l \psi'^2(x)dx}{\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx} = \frac{6S(2a^2l^4 + 14al^2 + 35)}{\rho A l^2(a^2l^4 + 9al^2 + 21)}$$

Dieser Ausdruck hat ein Minimum bei

$$a := \frac{-7 + \sqrt{133}}{4l^2}$$

Der minimale Wert ist gleich

$$\omega^2 = \mathbf{9,8697}\frac{S}{\rho A}\frac{1}{l^2}$$

Vergleiche mit dem exakten Wert

$$\omega^2 = \mathbf{9,8696}\frac{S}{\rho A}\frac{1}{l^2} .$$

II. Statisches Gleichgewicht und seine Stabilität

Ein System mit der potentiellen Energie $U(q_1,...,q_s)$ ist dann im statischen Gleichgewicht, wenn $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ für alle *i*.

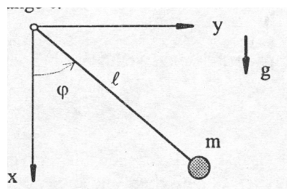
Ein Gleichgewicht ist *stabil*, wenn es einem *Minimum* der potentiellen Energie entspricht und *instabil* in allen anderen Fällen.

Im *eindimensionalen* Fall ist das Stabilitätskriterium besonders einfach:

U hat ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ (stabil)

U hat ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$ (instabil).

Beispiel 2. Gegeben sei ein mathematisches Pendel (Masse *m* auf einem masselosen Stab der Länge *l*). Man bestimme die Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität.



<u>*Lösung:*</u> Mit $U = -mgl\cos\varphi$ berechnet man die Gleichgewichtslagen aus der Gleichung

$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0$. Sie hat zwei Lösungen:

$\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$.

Die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach φ gibt Auskunft über Stabilität:

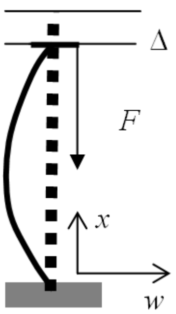
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgl\cos\varphi .$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1} > 0 \quad \Rightarrow \text{ stabiles Gleichgewicht.}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2} < 0 \quad \Rightarrow \text{ instabiles Gleichgewicht}$$

Beispiel 3. Knickung eines Stabes.

Ein elastischer Stab sei an seinen Enden gelenkig gelagert und in der vertikalen Richtung mit einer Kraft F belastet. Gegeben: E, I, l, F. Zu bestimmen sind die Stabilitätsbedingungen.



Lösung: Vorbereitender Schritt: Berechnung der potentiellen Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx - F\Delta$$

Bestimmen wir die Verschiebung Δ. Die Verkürzung wegen vertikaler Verschiebung ist Δ. Die Verlängerung wegen Biegung ist

$\int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx$. Die Längssteifigkeit eines schlanken Stabes ist viel größer als seine Biegesteifigkeit: In erster Annäherung kann der Stab als undehnbar angenommen werden. Das bedeutet, daß sich die Länge bei einer Auslenkung nicht ändert: $\Delta = \int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx$.

Für die potentielle Energie ergibt sich

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx \qquad (1)$$

Mit dem Ansatz $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l}$

(der den Randbedingungen $w(0) = 0$, $w(l) = 0$ genügt), bekommen wir

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$w''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Die potentielle Energie:

$$U = \frac{l}{4} EI \sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - \frac{Fl}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$= \frac{l}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^2 \left[EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right]$$

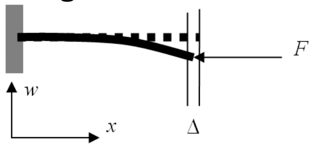
Diese Energie hat bei $a_1 = 0, ..., a_n = 0$ ein Minimum, wenn *alle* Koeffizienten vor $a_n{}^2$ positiv sind: $EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 > 0$ oder

$$EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - F > 0.$$

Der gerade Zustand ist stabil, wenn

$$\boxed{F < EI\left(\pi / l\right)^2}$$

IV. Rayleigh-Ritz-Verfahren zur Bestimmung von Knicklasten.



Die potentielle Energie eines wie gezeigt belasteten Stabes ist mit (1) gegeben. Wenn wir einen eingliedrigen Ansatz $w = a\psi(x)$ benutzen, so bekommen wir:

$$U = a^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l EI\psi''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2}\psi'^2 dx\right).$$

Die potentielle Energie hat bei $a = 0$ ein Minimum (stabiles Gleichgewicht), wenn

$$\frac{1}{2}\int_0^l EI\psi''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2}\psi'^2 dx > 0.$$

Für die kritische Last bekommen wir daraus

$$F = \frac{\int_0^l EI\psi''^2 dx}{\int_0^l \psi'^2 dx} \qquad (\textit{Rayleigh-Quotient}) \qquad (2)$$

Die exakte Knicklast ist immer kleiner als eine Abschätzung der Form (2)!

Bemerkung: Die Ansatzfunktionen müssen stets die *geometrischen* Randbedingungen erfüllen. Die dynamischen Randbedingungen brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Das Ergebnis wird allerdings verbessert, wenn auch die dynamischen Randbedingungen berücksichtigt werden.

Numerisches Beispiel: Im 1. Eulerschen Knickfall ist $F_k = \pi^2 EI / 4l^2 = \mathbf{2,467}\left(EI / l^2\right)$.

Benutzen wir einen eingliedrigen Ansatz $\psi = x^2$, so ergibt sich für die Knicklast:

$$F_k = EI\frac{4l}{\int_0^l 4x^2 dx} = \mathbf{3}\left(EI / l^2\right).$$

Mit einem zweigliedrigen Ansatz $\psi = x^2 + ax^3$:

$$F_k = EI\frac{1}{a}\frac{\frac{1}{18}\left(2 + 6al\right)^3 - \frac{4}{9}}{\frac{9}{5}a^2 l^5 + 3al^4 + \frac{4}{3}l^3}.$$

$$\frac{dF_k}{da} = \frac{180\left(18a^2l^2 + 22al + 5\right)}{l\left(27a^2l^2 + 45al + 20\right)^2} = 0$$

$$\frac{a}{l} = -\tfrac{11}{18} + \tfrac{\sqrt{31}}{18}.$$

$F_k = \mathbf{2.485}\left(EI / l^2\right)$ (Genauigkeit 0.7%)