Prüfungsklausur: Energiemethoden der Mechanik — WiSe 2013/2014

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

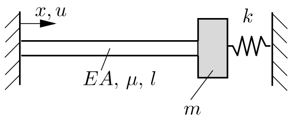
Nachname	______________	Vorname	______________
Studiengang	______________	Matrikelnummer	______________
Art der Klausur:		○ Prüfungsklausur	○ Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	Σ 1 - 4	5	Sichtung
erreichte Punkte					/ 40	/ 10	

Die Klausur umfasst 5 Aufgaben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Dabei muss jedoch Aufgabe 5 (Kurzfragen) mit mind. 5 von 10 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein (**nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!**). Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet. Die Bearbeitungszeit beträgt 2 Stunden.

1 Bekannte Aufgabe — 8 Punkte

Ein massebehafteter, elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) ist am linken Rand ($x = 0$) fest eingespannt und trägt am rechten Rand ($x = l$) eine Punktmasse m. Die Punktmasse ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) an die Umgebung gekoppelt.



Die Feder sei entspannt, wenn der Stab unverformt ist. Es werden ausschließlich Längsschwingungen $u\,(x, t)$ betrachtet.

(a) Wie lautet die **geometrische** Randbedingung für das System?

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U des Gesamtsystems.

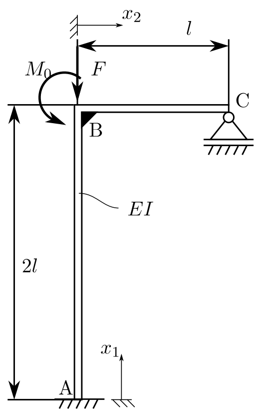
(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie die Bewegungsdifferentialgleichung und die **dynamische** Randbedingung her.

Geg.: m, k, l, $EA = \text{konst.}$, $\mu := \rho A = \text{konst.}$

2 2. Satz von Castigliano — 2+2+3+3=10 Punkte

Der gezeigte homogene Rahmen der Biegesteifigkeit EI habe einen biegesteifen Winkel bei $x_1 = 2l$ bzw. $x_2 = 0$. An dieser Stelle ist er mit einer Kraft F und einem Einzelmoment M_0 beansprucht. Längsdehnungen sollen vernachlässigt werden. Nutzen Sie im Folgenden den zweiten Satz von Castigliano um die Lagerkraft in C und den Biegewinkel in B zu bestimmen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:



(a) Geben Sie ein Ersatzsystem an, mit dem die vertikale Komponente der Lagerkraft in C bestimmbar ist. Wie lautet die Bedingung für den Satz von Castigliano, aus der diese Kraft berechenbar ist?

(b) Bestimmen Sie nun den Biegemomentenverlauf für das Ersatzsystem in Abhängigkeit der Lagerkraft in C.

(c) Bestimmen Sie die Lagerkraft in C.

(d) Bestimmen Sie mit dem 2. Satz von Castigliano den Biegewinkel in B.

Geg.: F, M_0, E, I, l

3 Lagrangesche Gleichung 2.Art — 3+4+4=11 Punkte

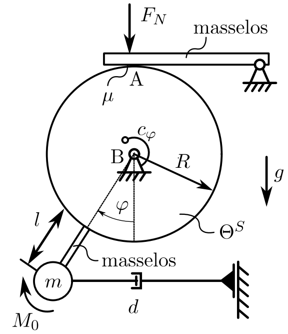
Die gezeigte ebene Scheibe (Radius R, Massenträgheitsmoment Θ^S) ist drehbar in ihrem Schwerpunkt gelagert und durch eine masselose Stange mit einer Punktmasse m verbunden. Im Punkt A herrscht Reibung mit dem Reibkoeffizienten μ zwischen der Scheibe und dem, mit der konstanten Kraft F_N belasteten, masselosen Hebel. Im Drehpunkt B befindet sich eine lineare Drehfeder mit Federkonstante c_φ, die bei $\varphi = 0$ entspannt ist. Zusätzlich ist die Punktmasse mit einem linear von der Geschwindigkeit abhängigen Dämpfer mit Dämpfungskonstante d verbunden, der stets horizontal ausgerichtet sei. An der Punktmasse greift außerdem das Moment M_0 an. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Geben Sie die kinetische und die potentielle Energie des Gesamtsystems an.

(b) Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion D und die generalisierte Kraft Q_φ zur Koordinate φ.

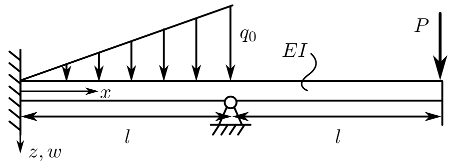
(c) Bestimmen Sie mit der Lagrange-Gleichung 2.Art die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems.

Geg.: m, l, Θ^S, R, μ, g, c_φ, d, F_N, M_0



4 Verfahren von Ritz — 2+8+1=11 Punkte

Der skizzierte homogene, linear elastische Balken der Länge $2l$ besitzt eine konstante Biegesteifigkeit EI. Neben einer linear verteilten Streckenlast greift zusätzlich am rechten Ende die Kraft P an. Die Durchsenkung $w(x)$ wird mit dem gegebenen Polynom dritten Grades angenähert:



$$w(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Bestimmen Sie näherungsweise die Biegelinie des Systems, indem Sie wie folgt vorgehen:

(a) Passen Sie die gegebene Näherung an die geometrischen Randbedingungen an, als verbleibende Konstante verwenden Sie a_3.

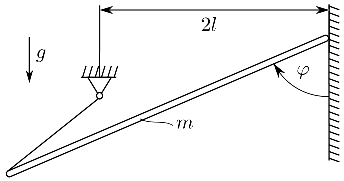
(b) Bestimmen Sie nun mit dem Verfahren von Ritz eine Näherungslösung für $w(x)$.

(c) Handelt es sich um einen guten oder weniger guten Ansatz? Begründen Sie Ihre Antwort.

Geg.: EI, l, P, q_0

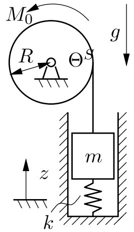
5 Kurzfragen **10 Punkte**

1. Das skizzierte System besteht aus einem Stab der Länge $3l$, welcher über eine masselose Schnur der Länge l mit einem Festlager verbunden ist und zugleich an einer Wand abgestützt ist.
   Zeichnen Sie in die Skizze eine verträgliche virtuelle Verrückung ein.



Geg: g, m, l **1 Punkt**

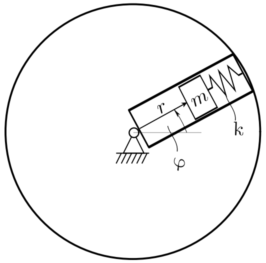
2. Wie lautet die generalisierte Kraft zur generalisierten Koordinate z? Die Feder sei entspannt bei $z = 0$, das Seil sei immer straff und die Führung reibungsfrei.



$Q_z =$

Geg.: R, M_0, Θ^S, k, m, g **1 Punkt**

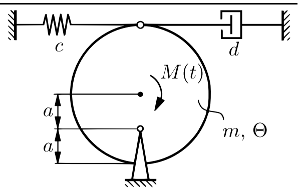
3. Auf einer mit $\dot{\varphi}$ rotierenden Scheibe gleite eine Masse m in einer Schiene reibungslos. Die Feder sei entspannt bei $r = r_0$. Wie lautet die LAGRANGEfunktion für das System für die generalisierten Koordinaten r und φ?



$L =$

Geg.: m, k, r_0 **1 Punkt**

4. Für das skizzierte System kann mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen die Bewegungsdifferentialgleichung gefunden werden. Welche der angegebenen Formen der LAGRANGEschen Gleichungen ist / sind für dieses System anwendbar? Kreuzen Sie an.



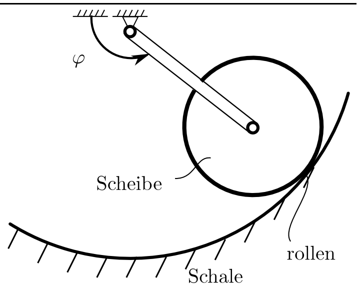
☐ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$ ☐ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}$

☐ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$ ☐ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Geg.: a, c, d, $M(t)$, m, Θ **1 Punkt**

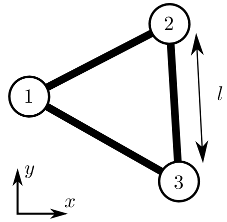
5. Das skizzierte System besteht aus einer Scheibe, die über eine Stange gelenkig gelagert ist und in einer Schale abrollt. Für reines Rollen besitzt das System einen Freiheitsgrad, der durch den Winkel φ beschrieben wird.

   Zeichnen Sie in das System einen weiteren Freiheitsgrad ein, der es Ihnen mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen 1. Art erlauben würde, die **Haftkraft im Rollkontakt** zu bestimmen.



1 Punkt

6. Drei Punktmassen sind über starre Stangen mit gleicher Länge l miteinander verbunden. Die Position jeder Punktmasse i wird durch zwei Koordinaten beschrieben $\{x_i, y_i\}$.
   Zur Nutzung mit den LAGRANGEschen Gleichungen 1. Art wurde folgende Zwangsbedingung aufgestellt:



$$g = l - \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = 0$$

Welche Zwangskraft kann mit dieser Bedingung und den LAGRANGEschen Gleichungen 1. Art bestimmt werden?

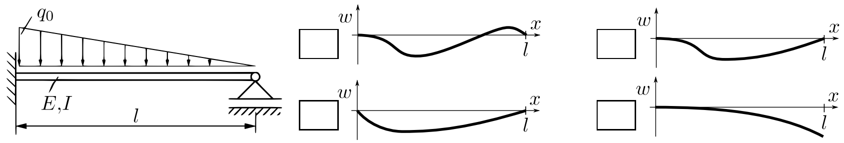
Geg.: l **1 Punkt**

7. Geben Sie den RAYLEIGH-Quotienten für einen homogenen Torsionsstab der Dichte ρ, des Querschnitts A und der Länge l sowie mit einem kreisrunden Querschnitt und polarem Flächenträgheitsmoment $I_p = I_t$ und Schubmodul G an. Als Ansatzfunktion wird ein eingliedriger Ansatz der Form $\vartheta(x,t) = a(t)\psi(x)$ gewählt.

$\omega^2 =$

Geg.: I_p, l, ρ, A, G **1 Punkte**

8. Für das skizzierte System kann eine Näherung für die statische Biegelinie mit Hilfe eines RITZ–Ansatzes bestimmt werden.
   Prüfen Sie die skizzierten Vorschläge für Ansatzfunktionen und kreuzen Sie jeden zulässigen Ansatz an.



1 Punkt

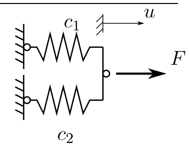
9. Klaus hat mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgende Variation des Potentials U eines Balkens der Länge l, der Biegesteifigkeit EI und der Last F berechnet.

$$\delta U = \int_0^l \big(EIw''''(x) + Fw''(x)\big)\,\delta w \mathrm{d}x + EIw''(l)\delta w'(l) - \big(EIw'''(l) + Fw'(l)\big)\,\delta w(l)$$

Wie lautet die 'Gleichgewichtsgleichung' des Systems und seine dynamischen Randbedingungen?

Geg.: F, l, EI **1 Punkt**

10. Zwei parallelgeschaltete Federn der Steifigkeiten $c_1 = c$ und $c_2 = 2c$ werden durch die Kraft F ausgelenkt. Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems U als Funktion der Kraft F. Wie lautet dann der zweite Satz von CASTIGLIANO um die Auslenkung u zu bestimmen? Wie groß ist diese?



$U =$

$u =$

Geg.: c, F **1 Punkt**

Aufgabe 1

(a) $\boxed{\sum = 1}$ Die einzige geometrische Randbedingung und die dazugehörige Bedingung für die Variation lautet:

$$\Rightarrow \quad u(0,t) = 0 \quad \forall t \quad \text{und} \quad \delta u(0,t) = 0 \quad \forall t \boxed{1}$$

(b) $\boxed{\sum = 1}$ Die Energieausdrücke lauten:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{u}^2(l,t) \tag{1}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EAu'^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}ku^2(l,t) \boxed{1} \text{ beide}$$

(c) $\boxed{\sum = 1}$ Das Prinzip von Hamilton lautet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}[\int_0^l \left(\mu \dot{u}^2(x,t) - EAu'^2(x,t)\right)\mathrm{d}x + \dots \tag{2}$$

$$\dots + \frac{1}{2}m\dot{u}^2(l,t) - \frac{1}{2}ku^2(l,t)]\mathrm{d}t = 0 \boxed{1} \tag{3}$$

(d) $\boxed{\sum = 5}$ Aus (3) ergeben sich vier Summanden die im folgenden einzeln behandelt werden:

$$\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} + \mathbf{IV} = 0 \tag{4}$$

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu \dot{u}(x,t)\delta\dot{u}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{5}$$

$$= \int_0^l \left[[\mu \dot{u}(x,t)\delta u(x,t)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{u}(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{u}(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

$$\mathbf{II} = -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EAu'(x,t)\delta u'(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} EAu'(l,t)\delta u(l,t)\mathrm{d}t + \dots$$

$$\dots + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EAu''(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

$$\mathbf{III} = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{u}(l,t)\delta\dot{u}(l,t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} m\ddot{u}(l,t)\delta u(l,t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\mathbf{IV} = -\int_{t_0}^{t_1} ku(l,t)\delta u(l,t)\mathrm{d}t \tag{11}$$

$\boxed{4}$ einen für jedes Integral

Eingesetzt in (4) ergibt sich:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_0^l \left(-\mu\ddot{u}(x,t) + EAu''(x,t)\right)\delta u(x,t)\mathrm{d}x + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \left(-EAu'(l,t) - m\ddot{u}(l,t) - ku(l,t)\right)\delta u(l,t)\right]\mathrm{d}t = 0$$

Daraus folgen die Bewegungsgleichung und die dyn. RB:

$$-\mu\ddot{u}(x,t) + EAu''(x,t) = 0 \tag{12}$$

$$EAu'(l,t) + m\ddot{u}(l,t) + ku(l,t) = 0 \quad \forall t \boxed{1}. \tag{13}$$

Aufgabe 3

(a) $\boxed{\sum = 2}$ Energien und LAGRANGEfunktion:

$$K = \frac{1}{2}\Theta^s\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(R+l)^2\dot{\varphi}^2, \quad \boxed{1} \tag{14}$$

$$U = \frac{1}{2}c_\varphi\varphi^2 - mg(R+l)\cos(\varphi), \quad \boxed{1} \tag{15}$$

(b) $\boxed{\sum = 4}$ Dissipationsfunktion:

$$D = \mu F_N|v_{rel,A}| + \frac{1}{2}d|v_{rel,C}|^2, \quad \boxed{1} \tag{16}$$

$$D = \mu F_N R|\dot{\varphi}| + \frac{1}{2}d\left[(R+l)\dot{\varphi}\cos(\varphi)\right]^2. \quad \boxed{2} \tag{17}$$

Generalisierte Kraft:

$$\delta W = M_0\delta\varphi \Rightarrow Q_\varphi = M_0. \quad \boxed{1} \tag{18}$$

(c) $\boxed{\sum = 5}$ Mit der LAGRANGE-Gleichung 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad \boxed{1} \tag{19}$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\Theta^s + m(R+l)^2\right)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}c_\varphi\varphi^2 + mg(R+l)\cos(\varphi). \quad \boxed{1} \tag{20}$$

und den einzelnen Termen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta^s\ddot{\varphi} + m(R+l)^2\ddot{\varphi}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -c_\varphi\varphi - mg(R+l)\sin(\varphi) \quad \boxed{1} \text{ beide zusammen}$$

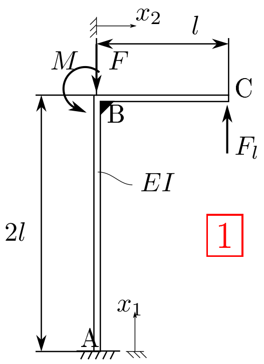
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = \mu F_N R\,\mathrm{sign}(\dot{\varphi}) + d\left[(R+l)\dot{\varphi}\cos(\varphi)\right](R+l)\cos(\varphi), \quad \boxed{1}$$

ergibt sich die DGL des Systems zu:

$$\left(\Theta^s + m(R+l)^2\right)\ddot{\varphi} + d\left[(R+l)\dot{\varphi}\cos(\varphi)\right](R+l)\cos(\varphi) + c_\varphi\varphi = M_0 - \mu F_N R\,\mathrm{sign}(\dot{\varphi}) - mg(R+l)\sin(\varphi). \quad \boxed{1}$$

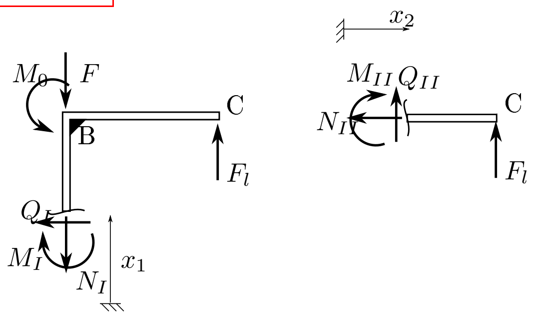
Aufgabe 2

(a) $\boxed{\sum = 2}$ Ersatzsystem:



Es gilt: $\frac{\partial W}{\partial F_l} = 0$ $\boxed{1}$

(b) $\boxed{\sum = 2}$ Biegemoment bestimmen:



$$M_I(x) = F_l l + M_0 \boxed{1} \tag{22}$$
$$M_{II}(x) = F_l(l - x_2) \boxed{1} \tag{23}$$

(c) $\boxed{\sum = 3}$ Ableitungen:

$$\frac{\partial M_I}{\partial F_l} = l \tag{24}$$
$$\frac{\partial M_{II}}{\partial F_l} = l - x_2 \boxed{1} \text{ für beide} \tag{25}$$

Berechne F_l:

$$\frac{\partial W}{\partial F_L} = \frac{1}{EI}\int_0^{2l} \frac{\partial M_I}{\partial F_l} M_I \mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_0^{l} \frac{\partial M_{II}}{\partial F_l} M_{II} \mathrm{d}x \boxed{1}$$
$$= \frac{1}{EI}\int_0^{2l} (F_l l^2 - M_0 l)\mathrm{d}x + \int_0^{l} (l-x)^2 F_l \mathrm{d}x = 0$$
$$\Rightarrow F_l = -\frac{6}{7}\frac{M_0}{l} \boxed{1} \tag{26}$$

(d) $\boxed{\sum = 3}$ Es gilt $\frac{\partial W}{\partial M_0} = \varphi(2l)$ $\boxed{1}$.
Für die Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial M_I}{\partial M_0} = 1 \tag{27}$$
$$\frac{\partial M_{II}}{\partial M_0} = 0. \boxed{1} \text{ für beide} \tag{28}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{1}{EI}\int_0^{2l} (F_l l + M_0)\mathrm{d}x \tag{29}$$
$$\Rightarrow w'(l) = \varphi(2l) = \frac{2}{7}\frac{M_0 l}{EI} \boxed{1} \text{ Vorzeichen egal} \tag{30}$$

Aufgabe 4

(a) $\boxed{\sum = 2}$ Geometrische Randbedingungen:

$$w(x=0) = 0, \tag{31}$$
$$w'(x=0) = 0 \tag{32}$$
$$w(x=l) = 0, \quad \boxed{1} \text{ alle} \tag{33}$$

einsetzen und anpassen:

$$a_3 = -a_2 l \Rightarrow w(x) = a_3(x^3 - lx^2). \quad \boxed{1} \tag{34}$$

(b) $\boxed{\sum = 8}$ Mit der potentiellen Energie:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI\,(w'')^2\,\mathrm{d}x, \quad \boxed{1} \tag{35}$$
$$(w'')^2 = 4a_3^2\left(9x^2 - 6xl + l^2\right), \tag{36}$$
$$W = 28EIa_3^2 l^3 \quad \boxed{2} \text{ Ergebnis für W} \tag{37}$$

und der äußeren Arbeit:

$$A = \int_0^l q(x)w(x)\mathrm{d}x + Pw(x=2l), \quad \boxed{1} \tag{38}$$
$$= \int_0^l \frac{q_0}{l} x a_3\left(x^3 - lx^2\right)\mathrm{d}x + 4Pa_3 l^3, \tag{39}$$
$$A = a_3\left(4Pl^3 - \frac{q_0}{20}l^4\right) \quad \boxed{1} \text{ Ergebnis für A,} \tag{40}$$

ergibt sich zunächst:

$$\Pi = 28EIa_3^2 l^3 - a_3\left(4Pl^3 - \frac{q_0}{20}l^4\right), \quad \boxed{1} \tag{41}$$

Es muss gelten:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} \overset{!}{=} 0, \quad \boxed{1} \text{ Bedingung} \tag{42}$$
$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{56EI}\left(4P - \frac{q_0 l}{20}\right), \tag{43}$$
$$\Rightarrow w(x) = \frac{1}{56EI}\left(4P - \frac{q_0 l}{20}\right)\left(x^3 - x^2 l\right). \quad \boxed{1}\ w(x) \tag{44}$$

(c) $\boxed{\sum = 1}$ Nein, der Ansatz ist nicht gut...

da die dynamischen RBen nicht erfüllt werden. $\boxed{1}$