Lösungshinweis:

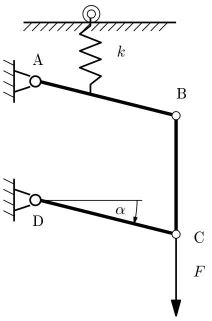
Tutorium

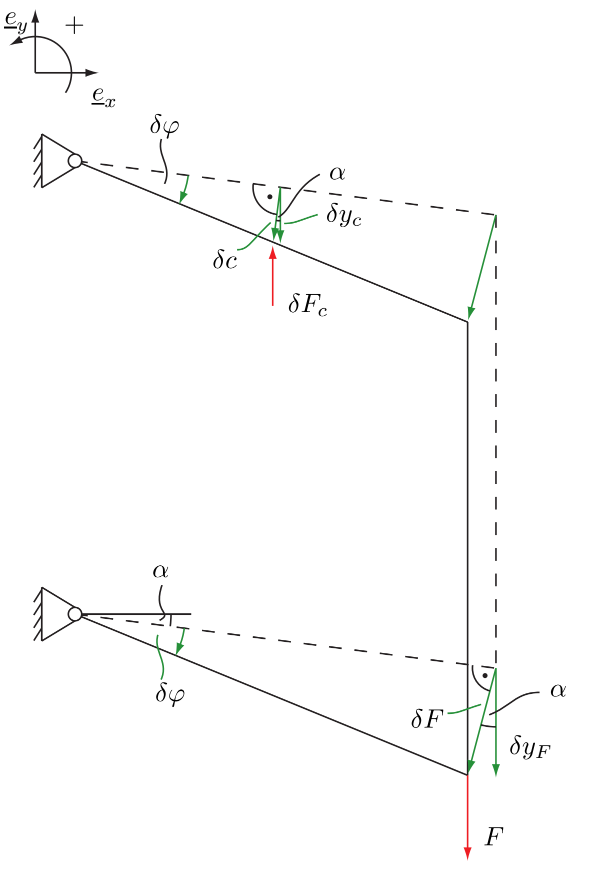
Aufgabe 3

Ein Gelenkviereck besteht aus drei starren Balken der Länge l. In der Mitte des Balkens AB ist eine Feder der Steifigkeit k angebracht. Die Feder ist stets senkrecht und sei entspannt, wenn $\alpha = 0$ (horizontale Lage der Balken AB und CD).

Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (Winkel α_G).

Geg.: F, l, α





Virtuelle Arbeit

$$\delta W = F\,\delta y_F - F_C\,\delta y_C \tag{1}$$

Kinematik

$$\delta_F = l\,\delta\varphi \tag{2}$$

$$\delta y_F = l\,\delta\varphi\,\cos\alpha = l\cos\alpha\,\delta\varphi \tag{3}$$

$$\delta_C = \frac{l}{2}\delta\varphi \tag{4}$$

$$\delta y_C = \frac{l}{2}\cos\alpha\,\delta\varphi \tag{5}$$

Federkraft

$$F_C = c\,\frac{l}{2}\sin\alpha \quad \text{(in der Gleichgewichtslage)} \tag{6}$$

Einsetzen

$$\delta W = \left[Fl\cos\alpha - c\frac{l}{2}\sin\alpha\frac{l}{2}\cos\alpha\right]\delta\varphi \stackrel{!}{=} 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \left(Fl - \frac{cl^2}{4}\sin\alpha\right)\cos\alpha = 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0 \quad\rightarrow\quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2};\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{4F}{cl} \quad\rightarrow\quad \alpha_3 = \arcsin\frac{4F}{cl} \tag{10}$$

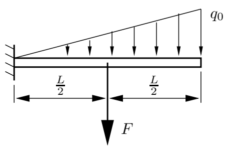
Damit ein α_3 existiert, muss in (10) gelten:

$$\frac{4F}{cl} \leq 1 \tag{11}$$

Aufgabe 56

Ein Kragbalken der Länge L mit konstanter Biegesteifigkeit EI ist mit einer wie skizziert linear verteilten Streckenlast q und einer in der Mitte angreifenden Kraft F belastet. Die Verschiebung des freien Balkenendes soll mit dem Verfahren von Ritz näherungsweise bestimmt werden.

Geg.: EI, L, F, q_0



(a) Passen Sie die Ansatzfunktion $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ für die Biegelinie an die geometrischen Randbedingungen an und berücksichtigen Sie zusätzlich, dass am freien Balkenende das Biegemoment verschwindet, $M(x = L) = 0$.

(b) Bestimmen Sie die Verschiebung des freien Balkenendes mit dem Verfahren von Ritz. Benutzen Sie dabei die angepasste Ansatzfunktion.

Koordinatensystem: Ursprung im Schnittpunkt Balken-Wand; x-Achse nach rechts positiv; z-,w-Achse nach unten positiv

Verschiebungsansatz:

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{12}$$

(a) geometrische Randbedingungungen:

$$w(0) = 0 \qquad \Rightarrow \; d = 0 \tag{13}$$
$$w'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \; c = 0 \tag{14}$$

Momenteinfreiheit am rechten Ende:

$$w''(L) = 0 \tag{15}$$
$$\Rightarrow 0 = [6ax + 2b]_{x=L} \Rightarrow b = -3aL \tag{16}$$

angepasster Verschiebungsansatz:

$$w(x) = ax^3 - 3aLx^2 \quad \text{mit} \tag{17}$$
$$w''(x) = 6a(x - L) \tag{18}$$

(b) lineare Streckenlast:

$$q(x) = q_0 \frac{x}{L} \tag{19}$$

elastisches Potential:

$$\Pi = W - A \quad \text{mit:} \tag{20}$$
$$W = \frac{1}{2}\int_0^L EIw''^2(x)dx \quad \text{und} \tag{21}$$
$$A = \int_0^L q(x)w(x)dx + Fw(\frac{L}{2}) \tag{22}$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned}\Pi = &\frac{1}{2}EI\int_0^L (6ax - 6aL)^2 dx - \\ &- \frac{q_0}{L}\int_0^L x(ax^3 - 3Lx^2)dx - F[ax^3 - 3aLx^2]_{x=\frac{L}{2}} \\ &= 18EIa^2 \int_0^L (x^2 - 2Lx + L^2)dx - \\ &- \frac{q_0 a}{L}\int_0^L (x^4 - 3Lx^3)dx - Fa\left[\frac{L^3}{8} - \frac{3L^3}{4}\right] \\ &= 18EIa^2\left[\frac{1}{3}x^3 - Lx^2 + L^2x\right]_0^L - \\ &- \frac{q_0 a}{L}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}Lx^4)\right]_0^L + \frac{5}{8}FaL^3 \\ &= 6EIL^3a^2 + \frac{11}{20}q_0 aL^4 + \frac{5}{8}FaL^3\end{aligned} \tag{23, 24}$$

Es muss gelten:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{also} \tag{25}$$
$$0 = 12EIL^3 a + \frac{11}{20}q_0 L^4 + \frac{5}{8}FL^3 \tag{26}$$

daraus folgt:

$$a = -\frac{22q_0L + 25F}{480EI} \tag{27}$$

Somit lautet die Ansatzfunktion:

$$w(x) = \frac{22q_0L + 25F}{480EI}x^2(3L - x) \tag{28}$$

Durch Auswertung dieser Funktion an der Stelle $x = L$ ergibt sich die Verschiebung des freien Balkenendes:

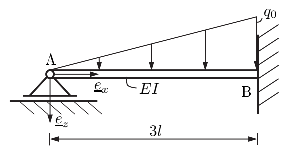
$$w(x = L) = \frac{22q_0L^4 + 25FL^3}{240EI}. \tag{29}$$

Hausaufgabe

Aufgabe 76

Der dargestellte Balken ist mit einer linearen Streckenlast beaufschlagt. Es ist die Verdrehung an der Stelle $x = l$ unter Verwendung des Satzes von Castigliano zu bestimmen.

Geg.: EI, l, q_o



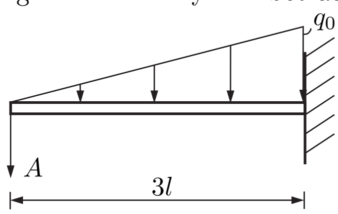
(a) Überführen Sie das System in ein äquivalentes, statisch bestimmtes Ersatzsystem indem Sie das Lager bei A durch eine Kraft ersetzen. Bestimmen Sie diese.

(b) Bestimmen Sie nun den Verdrehwinkel φ_l des Balkens an der Stelle $x = l$. Gehen Sie dabei davon aus, dass $\underline{A} = -\frac{3}{10}q_0 l \underline{e}_z$ die Ersatzkraft an der Stelle A ist.

(a) Die Streckenlast hat den Verlauf

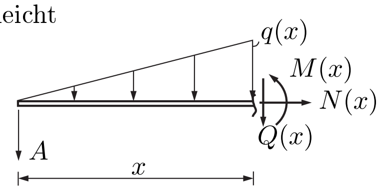
$$q(x) = q_0 \frac{x}{3l}. \tag{30}$$

Es wird das folgenden Ersatzsystem betrachtet:



Mit Hilfe des Satzes von Castigliano wird nun die Kraft A aus der Bedingung bestimmt, dass die Durchbiegung an der Stelle $x = 0$ verschwindet. Dazu wird zunächst der Verlauf des Biegemomentes ermittelt.

Wird statt der Streckenlast ihre resultierende Kraft betrachtet, erhält man aus dem Momentgleichgewicht an der Stelle x sehr leicht



$$0 = M(x) + Ax + q_0 \frac{x}{3l}\frac{x}{2}\frac{x}{3} \quad \text{also}$$
$$M(x) = -Ax - \frac{q_0 x^3}{18l}. \tag{31}$$

Alternativ ist der Einfluss der Streckenlast mittels des Integrals

$$\int_0^x q_0 \frac{x - \bar{x}}{3l}\bar{x}d\bar{x} \tag{32}$$

zu berücksichtigen.

Der Balken besitzt die komplementäre Energie

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{3l} \frac{M(x)^2}{EI} dx. \tag{33}$$

Im Folgenden wird die Durchbiegung an der Stelle der Kraft A betrachtet. Daher ist die partielle Ableitung von (33) nach A von Interesse. Nach dem Satz von Castigliano ist

$$\begin{aligned} w(x=0) &= \frac{\partial U}{\partial A} \\ &= \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{1}{2}\int_0^{3l} \frac{M(x)^2}{EI} dx\right) \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^{3l} M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial A} dx. \end{aligned} \tag{34}$$

Aus (31) folgt

$$\frac{\partial M(x)}{\partial A} = -x \tag{35}$$

und damit weiter:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= \frac{1}{EI}\int_0^{3l} Ax^2 + \frac{q_0 x^4}{18l} dx \\ &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{q_0}{90l}x^5\right]_0^{3l} \\ &= \frac{1}{EI}\left[9Al^3 + \frac{27}{10}q_0 l^4\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Aus der Bedingung $w(x=0) = 0$ folgt somit die Ersatzkraft

$$A = -\frac{3}{10}q_0 l. \tag{37}$$

(b) Zur Berechnung des gesuchten Verdrehwinkels wird ein Hilfsmoment M_H an der Stelle $x = l$ eingeführt (positiver Drehsinn bezüglich $\underline{e}_y$).

Dann wird analog zum Teil (a) der Momentenverlauf bestimmt. Es ist im Bereich $0 \leq x < l$:

$$M(x) = -\frac{1}{18l}q_0 x^3 + \frac{3}{10}q_0 l x \quad \text{mit} \tag{38}$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_H} = 0 \tag{39}$$

und im Bereich $l \leq x \leq 3l$:

$$M(x) = -\frac{1}{18l}q_0 x^3 + \frac{3}{10}q_0 l x - M_H, \tag{40}$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_H} = -1. \tag{41}$$

Die komplementäre Energie des Balkens ist

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^{3l} \frac{M(x)^2}{EI} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{l} \frac{M(x)^2}{EI} dx + \frac{1}{2}\int_l^{3l} \frac{M(x)^2}{EI} dx \end{aligned} \tag{42}$$

und für den Verdrehwinkel an der Stelle $x = l$ gilt nach dem Satz von Castigliano:

$$\begin{aligned} \varphi_l &= \left.\frac{\partial U}{\partial M_H}\right|_{M_H=0} \\ &= \left[\frac{1}{EI}\int_0^{l} M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial M_H} dx + \frac{1}{EI}\int_l^{3l} M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial M_H} dx\right]_{M_H=0} \end{aligned} \tag{43}$$

Wegen (39) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \varphi_l &= \left.\frac{1}{EI}\int_l^{3l} M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial M_H} dx\right|_{M_H=0} \\ &= \left.\frac{1}{EI}\int_l^{3l} \frac{q_0 x^3}{18l} - \frac{3q_0 l x}{10} + M_H dx\right|_{M_H=0} \\ &= \left.\frac{1}{EI}\left[\frac{q_0 x^4}{4\cdot 18l} - \frac{3q_0 l x^2}{2\cdot 10} + M_H x\right]_{x=l}^{x=3l}\right|_{M_H=0} \\ &= \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0 l^3}{72}(3^4-1) - \frac{3q_0 l^3}{20}(3^2-1)\right) \\ &= \frac{10 q_0 l^3}{9EI} - \frac{6 q_0 l^3}{5EI} \\ \varphi_l &= -\frac{4 q_0 l^3}{45 EI}, \end{aligned} \tag{44}$$

der gesuchte Verdrehwinkel.