Tutorium

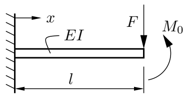
Aufgabe 78

Am Ende des skizzierten schubstarren Balkens mit der Biegesteifigkeit EI greifen ein Moment M_0 und eine Einzellast F an.

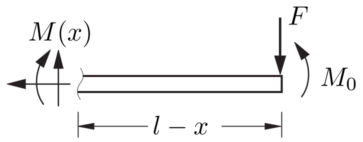
(a) Berechne die das elastische Potential U_{el} des Systems. Bestimme nun mit dem ersten Satz von CASTIGLIANO die Durchsenkung $w_1(l)$ und den Biegewinkel $\varphi_1(l)$ am rechten Ende des Balkens ($x = l$).

(b) Berechne den Biegewinkel $\varphi_2(l)$ am rechten Balkenende für den Fall $M_0 = 0$.

Geg.: M_0, F, EI, l



(a) Biegemoment:



$$\Sigma M_s = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = M_0 - F(l-x)} \tag{1}$$

Aufstellen des elastischen Potentials U_{el}

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l \big(M_0 - F(l-x)\big)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI}\Big[\frac{1}{3F}\big(M_0 - F(l-x)\big)^3\Big]_0^l \\ &= \frac{1}{6EIF}\big(M_0^3 - (M_0 - Fl)^3\big) \\ &= -\frac{1}{6EIF}\big(-3M_0^2 Fl + 3M_0F^2l^2 - F^3l^3\big) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{6EI}l^3\Big(\frac{3M_0^2}{l^2} - \frac{3M_0}{l}F + F^2\Big)}} \end{aligned} \tag{2}$$

Verschiebung $w_1(l)$

$$\frac{\partial U_{el}}{\partial F} = w_1(l) \Rightarrow w_1(l) = \underline{\underline{+\frac{l^3}{6EI}\big(2F - \frac{3M_0}{l}\big)}} \tag{3}$$

Verdrehung $\varphi_1(l)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{el}}{\partial M_0} = \varphi_1(l) \Rightarrow \varphi_1(l) &= \frac{1}{6EI}\cdot l^2\big(6\frac{M_0}{l} - 3F\big) \\ &= \underline{\underline{\frac{l^2}{EI}\big(\frac{M_0}{l} - \frac{F}{2}\big)}} \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Verdrehung $\varphi_2(l)$ für $M_0 = 0$

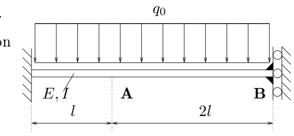
$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{el}}{\partial M_0}\Big|_{M_0=0} = \varphi_2(l) \Rightarrow \varphi_2(l) &= \frac{1}{6EI}\cdot l^2\big(6\frac{M_0}{l} - 3F\big)\Big|_{M_0=0} \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2EI}Fl^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

Aufgabe 69

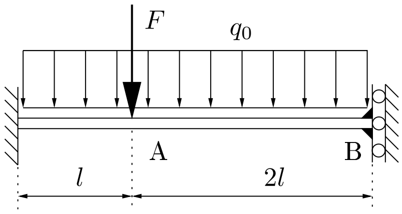
Gegeben ist die nebenstehend skizzierte Konstruktion.

Berechnen Sie unter Verwendung des ersten Satzes von Castigliano die Durchsenkung an der Stelle **A**.

Gegeben: l, q_0, E, I, der Balken sei schubstarr

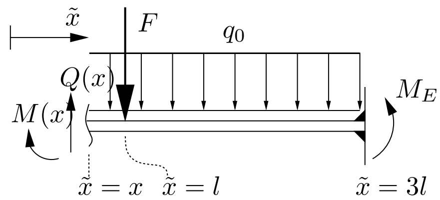


1. An der Stelle, an der die Verschiebung bestimmt werden soll, wird eine fiktive Kraft F eingeführt.



Da das System statisch unbestimmt ist, wird der Einfluss der Führung am rechten Ende durch das Einspannmoment M_E beschrieben. Die dort angreifende Lagerkraft hat keinen Einfluss auf das Problem und wird daher ignoriert. Alternativ könnte auch diese Bindung durch eine Normalkraft ersetzt werden.

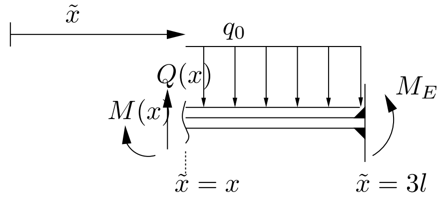
Zwischen der festen Einspannung und dem Punkt A hat dann die Querkraft den Verlauf



$0 < x < l$
Längskräfte der Übersicht wegen weggelassen

$$Q(x) = \int_x^{3l} q_0 d\tilde{x} + F = q_0(3l - x) + F, \tag{6}$$

und zwischen den Stellen A und B



$l < x < 3l$
Längskräfte weggelassen

$$Q(x) = \int_x^{3l} q_0 d\tilde{x} = q_0(3l - x). \tag{7}$$

Damit hat das Biegemoment im Bereich $0 < x < l$ den Verlauf:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_E - \int_x^{3l} Q(\tilde{x})d\tilde{x} \\ &= M_E - \int_x^{3l} q_0(3l - \tilde{x})d\tilde{x} - \int_x^l F d\tilde{x} \\ &= M_E - \frac{1}{2}q_0l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big] \\ &\quad - Fl\Big(1 - \frac{x}{l}\Big) \end{aligned} \tag{8}$$

und im Bereich $l < x < 3l$:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_E - \int_x^{3l} Q(\tilde{x})d\tilde{x} \\ &= M_E - \int_x^{3l} q_0(3l-\tilde{x})d\tilde{x} \\ &= M_E - \frac{1}{2}q_0 l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big] \end{aligned} \tag{9}$$

Beachte: Im Ergebnis für die Schnittlasten steckt noch das bisher unbekannte Einspannmoment M_E am rechten Ende.

3. Formänderungsenergie des Systems

$$U = \int_0^{3l} \frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx \tag{10}$$

4. Bestimmung der noch unbekannten Lagerreaktionen (Einspannungsmoment rechts):

Der Satz von Castigliano sagt, dass die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der gesuchten Lagerreaktion gleich der dazugehörigen Verschiebung, also gleich Null ist. Mit $\varphi \approx w'$ folgt

$$\varphi\,(x=3l) = 0 = \frac{\partial U}{\partial M_E} \tag{11}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial M_E}\Big(\int_0^{3l}\frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx\Big) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{3l}\frac{1}{EI}M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial M_E}dx \\ &= \int_0^{l}\frac{1}{EI}\Big[M_E - \frac{1}{2}q_0 l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big) \\ &\qquad - Fl\Big(1-\frac{x}{l}\Big)\Big]dx \\ &+ \int_l^{3l}\frac{1}{EI}\Big[M_E - \frac{1}{2}q_0 l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9\Big)\Big]dx \\ &= \frac{1}{EI}\Big[3l\,M_E - \frac{9}{2}q_0\,l^3 - \frac{1}{2}Fl^2\Big] \end{aligned} \tag{13}$$

aufgelöst nach M_E:

$$M_E(x) = \frac{3}{2}q_0 l^2 + \frac{1}{6}Fl \tag{14}$$

Dann lauten die Schnittlasten im Bereich $0 < x < l$:

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big] - Fl\Big(\frac{5}{6} - \frac{x}{l}\Big) \tag{15}$$

und im Bereich $l < x < 3l$:

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big] + \frac{1}{6}Fl \tag{16}$$

5. Durchsenkung am Punkt A: Der Satz von Castigliano sagt, daß die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der fiktiven Kraft F die Verschiebung an dieser Stelle ergibt. Die fiktive Kraft wird dabei nach der Differentiation zu Null gesetzt.

$$w(x=l) \;=\; \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F=0} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial F}\Big(\int_0^{3l}\frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx\Big)\Big|_{F=0} \\ &= \int_0^{3l}\frac{1}{EI}M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial F}dx\Big|_{F=0} \\ &= \int_0^{l}\frac{1}{EI}\Big[-\frac{1}{2}q_0 l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big) \\ &\qquad - Fl\Big(\frac{5}{6}-\frac{x}{l}\Big)\Big]\Big[-l\Big(\frac{5}{6}-\frac{x}{l}\Big)\Big]dx\Big|_{F=0} \\ &+ \int_l^{3l}\frac{1}{EI}\Big[-\frac{1}{2}q_0 l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big) \\ &\qquad + \frac{1}{6}Fl\Big]\Big[\frac{1}{6}l\Big]dx\Big|_{F=0} \\ &= \frac{1}{EI}\,l^3\Big\{q_0 l\frac{75}{72} + F\frac{1}{4}\Big\}\Big|_{F=0} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\Rightarrow w(x=l) = \frac{25}{24}\,\frac{q_0 l^4}{EI} \tag{19}$$

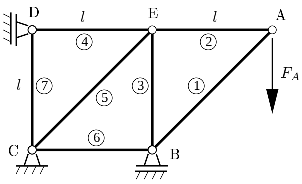
Hausaufgabe

Aufgabe 74

Das abgebildete Fachwerk aus 7 Stäben mit der Dehnsteifigkeit EA ist innerlich statisch bestimmt. Aufgrund der Lagerung in den Punkten B, C, D ist das Fachwerk äußerlich einfach statisch überbestimmt.

Die (komplementäre) Formänderungsenergie eines longitudinal gedehnten Stabes beträgt:

$$U_{\text{Stab}} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{N^2}{EA} dx$$



(a) Machen Sie die Lagerung des Fachwerks statisch bestimmt, indem Sie das Lager bei B entfernen und dort die Lagerkraft F_B einführen. Bestimmen Sie dann die Kräfte in den Stäben, z.B. indem Sie die Knoten A, B und E freischneiden.

(b) Berechnen Sie nun die (komplementäre) Formänderungsenergie U des Fachwerkes als Funktion der Kräfte F_A und F_B.

(c) Nutzen Sie im folgenden die (komplementäre) Formänderungsenergie

$$U = \frac{l}{EA}\left[aF_A^2 + bF_AF_B + cF_B^2\right] \ ,$$

mit den bekannten Konstanten a, b und c. Berechnen Sie die Lagerkraft F_B.

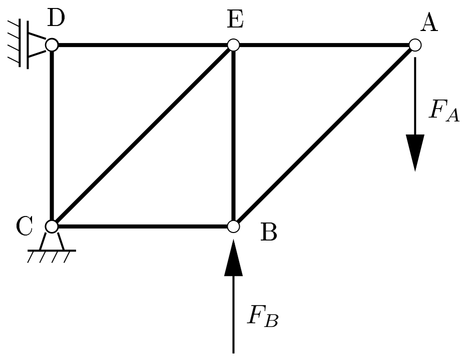
(d) Wie groß ist die statische Durchsenkung in vertikaler Richtung u_A am Punkt A?

(e) An der Stelle A sei nun statt der Kraft F_A eine Punktmasse m angebracht. Die Masse der Stäbe soll gegenüber dieser Punktmasse vernachlässigt werden.

Betrachtet werden ausschließlich vertikale Schwingungen der Punktmasse m. Das Fachwerk verhält sich dann wie eine lineare Feder. Wie groß ist die Ersatzfedersteifigkeit? Welche Eigenkreisfrequenz hat das System?

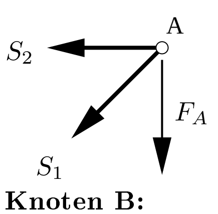
Geg.: F_A, l, EA, m

(a)



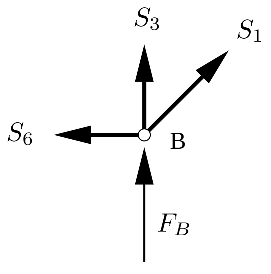
Stab 7 ist ein Nullstab (Betrachte Knoten D).

Knoten A:



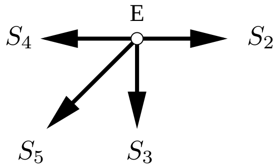
$$S_2 = F_A \tag{20}$$
$$S_1 = -\sqrt{2}F_A \tag{21}$$

Knoten B:



$$S_3 = F_A - F_B \tag{22}$$
$$S_6 = -F_A \tag{23}$$

Knoten E:



$$S_5 = \sqrt{2}(F_B - F_A) \tag{24}$$
$$S_4 = 2F_A - F_B \tag{25}$$

Alle Stabkräfte sind als Zugkräfte eingezeichnet.

(b)

$$U = \sum_{j=1}^{7}\int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{2EA} dx \tag{26}$$
$$= \frac{1}{2EA}\sum_{j=1}^{7} l_j S_j^2$$
$$l_2 = l_3 = l_4 = l_6 = l_7 = l$$
$$l_1 = l_5 = \sqrt{2}l$$

Alles einsetzen ergibt:

$$U = \frac{l}{EA}[F_A^2(\frac{7}{2} + 2\sqrt{2}) + ...$$
$$...F_B^2(1+\sqrt{2}) - F_AF_B(3+2\sqrt{2})] \tag{27}$$

(c)

$$U = \frac{l}{EA}(aF_A^2 + bF_AF_B + cF_B^2)$$

Forderung für Lager B (mit dem ersten Satz von Castigliano):

$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F_B} = 0$$
$$\Longrightarrow bF_A + 2cF_B = 0$$
$$\Longrightarrow F_B = -\frac{b}{2c}F_A \tag{28}$$

(d) Einsetzen von F_B in die (komplementäre) Formänderungsenergie liefert

$$U = \frac{lF_A^2}{EA}(a - \frac{b^2}{4c}) \tag{29}$$
$$u_A = \frac{\partial U}{\partial F_A} = \frac{lF_A}{EA}(\frac{4ac - b^2}{2c}) \tag{30}$$

(e) Die Federsteifigkeit k berechnet sich aus $u_A = \frac{F_A}{k}$

$$k = \frac{EA}{l}(\frac{2c}{4ac - b^2}) \tag{31}$$

Bewegungsdifferentialgleichung (freie Schwingung)

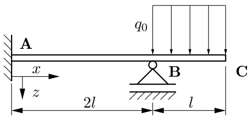
$$m\ddot{u}_A + ku_A = 0$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{EA}{lm}(\frac{2c}{4ac - b^2})} \approx 0{,}42\sqrt{\frac{EA}{ml}} \tag{32}$$

Aufgabe 79

Der skizzierte dehn- und schubstarre Träger mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist einfach statisch unbestimmt.



(a) Machen Sie das System statisch bestimmt, indem Sie das Lager an der Stelle **B** durch eine noch zu bestimmende Kraft ersetzen.

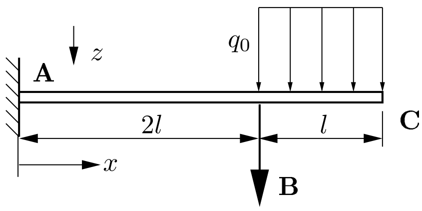
(b) Unterteilen Sie den Balken in zwei Bereiche, und ermitteln Sie den Momentenverlauf analytisch.

(c) Ermitteln Sie die Ableitung der Formänderungsenergie, und bestimmen Sie die eingeführte unbekannte Kraft.

(d) Geben Sie alle Lagerkräfte bzw. -momente an.

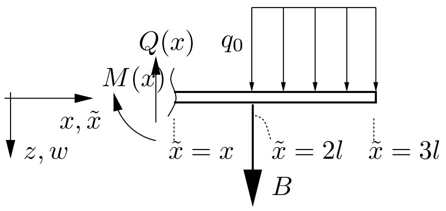
Gegeben seien die Größen: l, E, I, q_0

(a)



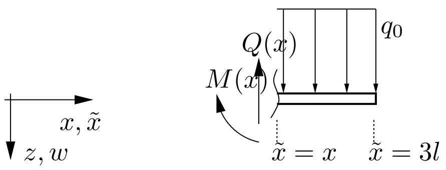
(b) In den folgenden Freischnitten wird die Normalkraft aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

1. Bereich $(0 < x < 2l)$



$$\sum M_y^{\text{Schnitt}} = 0 = -M(x) - B(2l - x) - q_0 l\Big(\frac{5}{2}l - x\Big)$$
$$M(x) = (q_0 l + B)x - \Big(\frac{5}{2}q_0 l + 2B\Big)l \tag{33}$$

2. Bereich $(2l < x < 3l)$



$$\sum M_y^{\text{Schnitt}} = 0 = -M(x) - q_0 \frac{1}{2}(3l - x)^2$$
$$M(x) = -\frac{q_0}{2}(3l - x)^2 \tag{34}$$

(c) Die Formänderungsenergie des Balkens ist gleich:

$$W = \int_0^{3l} \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx \tag{35}$$

Die Durchsenkung $w_B = w(x = 2l)$ an der Stelle **B** ist nach dem ersten Satz von Castigliano (Voraussetzungen: linear elastische, nicht vorgespannte Systeme) gleich:

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial B} = \frac{1}{EI}\int_0^{3l} M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial B}dx \tag{36}$$
$$= \frac{1}{EI}\int_0^{2l}\Big[(q_0 l + B)x - \big(\frac{5}{2}q_0 l + 2B\big)l\Big]\Big[x - 2l\Big]dx$$
$$+ \frac{1}{EI}\int_{2l}^{3l}\Big[-\frac{q_0}{2}(3l - x)^2\Big]\Big[0\Big]dx$$
$$= \frac{1}{EI}\Big(-\frac{11}{3}q_0 l^4 - \frac{8}{3}Bl^3\Big) \tag{37}$$

Hierbei wurde in (36) die Produktregel benutzt.

Die Durchsenkung an der Stelle **B** ist gleich Null, d.h. $w(x = 2l) = w_B = 0$. Mit Gleichung (37) ergibt sich:

$$B = -\frac{11}{8}q_0 l$$

(d) Die Lagerreaktionen in der festen Einspannung bei **A** ergeben sich aus dem statischen Kräfte- und Momentengleichgewicht zu:

$$A = -\frac{3}{8}q_0 l \tag{38}$$
$$M_A = -\frac{1}{4}q_0 l^2 \tag{39}$$

(A positiv nach oben, M_A im Uhrzeigersinn). Normalkräfte sind offensichtlich nicht vorhanden.