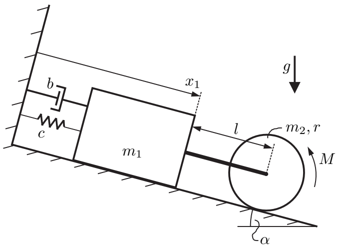
Tutorium

Aufgabe 49

Auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel α) befindet sich ein System aus einem Klotz (Masse m_1) und einem Vollzylinder (Masse m_2, Radius r), die durch eine starre Stange (Länge l, Masse vernachlässigbar) miteinander verbunden sind.

Der Klotz gleitet reibungsfrei über den Boden und ist mittels einer Feder (Federsteifigkeit c, entspannt bei $x_1 = a$) und eines linearen Dämpfers (Dämpfungskonstante b) an die Umgebung gekoppelt. Die Rolle führt eine reine Rollbewegung aus. An ihr greift außerdem das Moment M an.

Mittels des Lagrange-Formalismus sollen die Bewegungsgleichung des Systems und die Kraft in der Stange berechnet werden. Geg.: $g, m_1, m_2, r, l, a, \alpha, b, c, M$



(a) Wählen Sie eine geeignete generalisierte Koordinate x_2 zusätzlich zu x_1, so dass mit dem Lagrange-Formalismus die Stangenkraft bestimmt werden kann. Erklären Sie die Bedeutung dieser Koordinate und geben Sie die Zwangsbedingung(en) an.

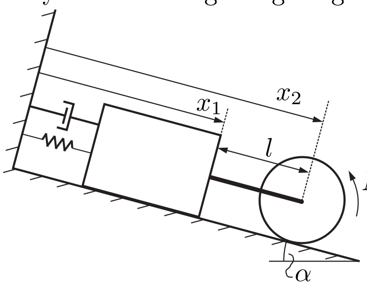
(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den beiden generalisierten Koordinaten x_1 und x_2 auf.

(c) Beschreiben Sie den Einfluss des Dämpfers und des Momentes M mittels Dissipationsfunktion bzw. generalisierter Kraft.

(d) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf.

(e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung(en) und die Kraft in der Stange.

(a) Die zweite Koordinate x_2 ist die Schwerpunktsverschiebung des Zylinders enlang der geneigten Ebene.



Die Zwangsbedingung lautet dann

$$g(x_1, x_2) = x_2 - x_1 - l = 0 \tag{1}$$

(b) Das System besitzt die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}c(x_1 - a)^2 - m_1 g x_1 \sin\alpha - m_2 g x_2 \sin\alpha \tag{2}$$

und die kinetische Energie

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Dabei sind

$$\Theta = \frac{1}{2}m_2 r^2 \text{ das Massenträgheitsmoment und} \tag{4}$$

$$\varphi = -\frac{x_2}{r} \text{ der Drehwinkel} \tag{5}$$

des Zylinders. Somit gilt

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m_2\dot{x}_2^2 \tag{6}$$

und die Lagrange-Funktion lautet

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ L &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}c(x_1 - a)^2 \\ &\quad + m_1 g x_1 \sin\alpha + m_2 g x_2 \sin\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

(c) Der Dämpfer wird in der Dissipationsfunktion berücksichtigt

$$D = \frac{1}{2}b\dot{x}_1^2, \tag{8}$$

der Einfluss des äußeren Moments wird als generalisierte Kraft betrachtet

$$\begin{aligned} \delta W &= M\delta\varphi \\ &= M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\delta x_2\right) \\ &= 0\delta x_1 - \frac{M}{r}\delta x_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Somit sind

$$Q_{x_1} = 0 \quad \text{und } Q_{x_2} = -\frac{M}{r}. \tag{10}$$

(d) Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = Q_{x_i} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i},\ i \in \{1;2\} \tag{11}$$

Durch Auswertung der Ableitungen ergeben sich die Gleichungen

$$m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + c(x_1 - a) = m_1 g \sin\alpha - \lambda \tag{12}$$

$$\frac{3}{2}m_2\ddot{x}_2 = m_2 g \sin\alpha + \lambda - \frac{M}{r}. \tag{13}$$

(e) Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung wird nun benutzt, dass tatsächlich

$$x_2 = x_1 + l \quad \text{also } \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \tag{14}$$

gilt. Mit dieser Beziehung folgt aus (12)+(13) unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$(m_1 + \frac{3}{2}m_2)\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + c(x_1 - a) = (m_1 + m_2) g \sin\alpha - \frac{M}{r}. \tag{15}$$

Analog folgt z.B. aus $\frac{3}{2}m_2 \cdot (12) - m_1 \cdot (13)$ nach kurzer Umformung

$$\lambda = \frac{-b\dot{x}_1 - c(x_1 - a) + \frac{1}{3}m_1 g \sin\alpha + \frac{2m_1}{3m_2}\frac{M}{r}}{1 + \frac{2m_1}{3m_2}} =: S, \tag{16}$$

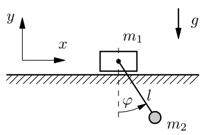
die Kraft in der Stange.

Aufgabe 41

Zwischen der Masse m_1 und der horizontalen Ebene besteht Gleitreibung. Der Betrag der Gleitreibungskraft wird über die Zwangskraft des Pendelfadens von der Schwingung der Masse m_2 beeinflußt.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 1.Art sowohl die Normalkraft zwischen m_1 und der Ebene als auch die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems (Die Zwangskraft des Pendelfadens ist nicht gesucht!).

Geg.: m_1, m_2, l, g, μ



Gesucht: Bewegungsdifferentialgleichungen und Normalkraft zwischen m_1 und der Bahn.

Die Normalkraft unterbindet die Vertikalbewegung der Masse m_1. Diese wird jetzt zugelassen, dafür aber die entsprechende Zwangskraft sowie die Zwangsbedingung hinzugezogen!

Kinematik: Seien $\underline{r}_1 = x_1\underline{e}_x + y_1\underline{e}_y$ und $\underline{r}_2$ die Ortsvektoren zu den Massen m_1 bzw. m_2. Dann ist:

$$\underline{r}_2 = (x_1 + l\sin\varphi)\underline{e}_x + (y_1 - l\cos\varphi)\underline{e}_y \tag{17}$$
$$\underline{v}_2 = (\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi})\underline{e}_x + (\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi})\underline{e}_y \tag{18}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{19}$$

also:

$$T(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\varphi}, \varphi) = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi})^2\right] \tag{20}$$

Potentielle Energie:

$$U = +m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = (m_1 + m_2)g y_1 - m_2 g l cos\varphi \tag{21}$$

Dissipationsfunktion:

$$D = \mu N|\dot{x}_1| \tag{22}$$

Zwangsbedingung:

$$g(y_1) = y_1 = 0 \tag{23}$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2 \left[(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi})^2\right] - (m_1 + m_2)g y_1 + m_2 g l\cos\varphi \tag{24}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi}) \tag{25}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2(-l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}) \tag{26}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = (sgn\dot{x}_1)\mu N; \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \tag{27}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1\dot{y}_1 + m_2(\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi}) \tag{28}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_2(l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\ddot{\varphi}) \tag{29}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -(m_1 + m_2)g; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial y_1} = 1 \tag{30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\left[(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi})l\cos\varphi + (\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi})l\sin\varphi\right] = m_2 l(\dot{x}_1\cos\varphi + \dot{y}_1\sin\varphi + l\dot{\varphi}) \tag{31}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l\left[\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\sin\varphi\dot{\varphi} + \ddot{y}_1\sin\varphi + \dot{y}_1\cos\varphi\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi}\right] \tag{32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2\left[(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\dot{\varphi})(-l\sin\varphi\dot{\varphi}) + (\dot{y}_1 + l\sin\varphi\dot{\varphi})l\cos\varphi\dot{\varphi}\right] - m_2 g l\sin\varphi = m_2(-\dot{x}_1 l\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{y}_1 l\cos\varphi\dot{\varphi}) - m_2 g l\sin\varphi \tag{33}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \qquad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 \tag{34}$$

Lagrange- Formalismus (1. Art):

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten allgemein:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial q_i}. \tag{35}$$

Bezüglich der drei generalisierten Koordinaten $q_i \in \{x, y, \varphi\}$ erhält man die drei Lagrange-Gleichungen:

$$L_x: \quad (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2(-l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}) + + (sgn\dot{x}_1)\mu N = 0 \tag{36}$$
$$L_y: \quad (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_2(l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\ddot{\varphi}) + + (m_1 + m_2)g = \lambda \equiv N \tag{37}$$
$$L_\varphi: m_2 l(\ddot{x}_1\cos\varphi + \ddot{y}_1\sin\varphi + l\ddot{\varphi}) + m_2 g l\sin\varphi = 0 \tag{38}$$

Einsetzen der Zwangsbedingung:

Mit der Zwangsbedingung

$$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \dot{y}_1 = 0 \quad ; \ddot{y}_1 = 0 \tag{39}$$

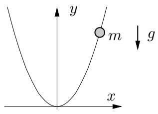
folgt daraus schließlich:

$$L_y: \quad N = m_2(l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\ddot{\varphi}) + (m_1 + m_2)g \tag{40}$$
$$L_\varphi: \quad \ddot{x}_1\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \tag{41}$$

L_x: wie oben, jedoch kann N nun eingesetzt werden

Hausaufgaben

Aufgabe 43



Auf einem ruhenden, parabelförmig gebogenen Draht rutscht eine Perle mit Reibung. Die Schwerkraft wirkt in negative y-Richtung.

Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung auf und berechnen Sie die Zwangskraft mit Hilfe der LAGRANGEgleichungen 1.Art.

Geg.: m, g, $y(x) = ax^2$, $a = const.$, μ

Kinetische Energie: $$T = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\Big) \tag{42}$$

Potentielle Energie: $$U = mgy \tag{43}$$

Dissipationsfunktion: $$D = \mu N|\underline{v}_{rel}| = \mu N\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{44}$$

N.R.:
$$\underline{r}_m = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y$$
$$\underline{v}_m = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y$$
$$|\underline{v}_m| = |\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

Zwangsbedingung: $$g(x,y) = y - ax^2 = 0 \tag{45}$$

LANGRANGE-Funktion: $$L = T - U = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\Big) - mgy \tag{46}$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = m\ddot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \mu N\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -2ax$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\Big) = m\ddot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \mu N\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

LANGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} - 0 + \mu N\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = -2\lambda ax =: N_x \tag{47}$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$
$$\Rightarrow \quad m\ddot{y} + mg + \mu N\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \lambda =: N_y \tag{48}$$

Aus der Zwangsbedingung (45) folgt:

$$y = ax^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = 2ax\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = 2a\dot{x}^2 + 2ax\ddot{x} \tag{49}$$

Einsetzen von $\dot{y}$ aus (49) in (47):

$$m\ddot{x} + \mu N\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+4a^2x^2\dot{x}^2}} = -2\lambda ax$$
$$m\ddot{x} + \mu N\frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -2\lambda ax =: N_x \tag{50}$$

Einsetzen von $\dot{y}$ und $\ddot{y}$ aus (49) in (48):

$$2am\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right) + mg + \mu N\frac{2ax\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+4a^2x^2\dot{x}^2}} = \lambda$$
$$2am\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right) + mg + \mu N\frac{2ax}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \lambda =: N_y \tag{51}$$

Nun ist aber

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{\lambda + (-2ax\lambda)^2} = \sqrt{1+4a^2x^2}\lambda \tag{52}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{N}{\sqrt{1+4a^2x^2}} = \lambda \tag{53}$$

Einsetzen von (53) in (50) und (51):

$$m\ddot{x} + \mu\lambda\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -2ax\lambda \tag{54}$$
$$2am\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right) + mg + \mu 2ax\lambda\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \lambda \tag{55}$$

mit $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = (\text{sign }\dot{x})$[1] folgt aus (54):

$$m\ddot{x} = -\left[2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})\right]\lambda$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = -\frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})}}} \tag{56}$$

Einsetzen von (56) in (55):

$$2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg = -\frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})}\cdot(1 - \mu 2ax\cdot(\text{sign }\dot{x}))$$

$$\left(2a\dot{x}^2 + g\right)m\cdot\left[2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})\right] + 2amx\ddot{x}[\mu(\text{sign }\dot{x}) + 2ax] = m\ddot{x}\left[2ax\mu(\text{sign }\dot{x}) - 1\right]$$

$$\boxed{(1+4a^2x^2)\ddot{x} + \left[2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})\right]\left(2a\dot{x}^2 + g\right) = 0} \tag{57}$$

Bewegungsdgl.

Für die Zwangskraft N ergibt sich damit aus (52):

$$N = -\sqrt{1+4a^2x^2}\cdot\frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})} \tag{58}$$

Mit der Bewegungsdgl. (57) kann man zudem die Beschleunigung $\ddot{x}$ eliminieren:

$$N = -\sqrt{1+4a^2x^2}\cdot\frac{-m\left[2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})\right]\left(2a\dot{x}^2 + g\right)}{(1+4a^2x^2)\cdot\left[2ax + \mu(\text{sign }\dot{x})\right]}$$

$$\boxed{N = \frac{(2a\dot{x}^2 + g)m}{\sqrt{1+4a^2x^2}}} \text{ Zwangskraft} \tag{59}$$

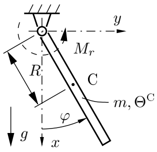
[1] Die Signum-Funktion (auch Vorzeichen-Funktion) sign gibt das Vorzeichen des Argumentes (also -1 oder +1) an. Sie ist üblicherweise wie folgt definiert:

$$\text{sign } x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 44

Bei dem skizzierten Pendel tritt am Gelenk ein linear viskoses Reibmoment der Größe $M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$ auf (r_φ: Drehviskosität).

Stellen Sie für folgende Koordinatensysteme die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf, werten Sie diese aus, bestimmen Sie die Zwangskraftparameter, werten Sie diese aus und führen Sie eine vergleichende Diskussion durch.



(a) kartesische Koordinaten (x, y) des Massenmittelpunktes C und Drehwinkel φ

(b) ebene Polarkoordinaten (r, φ) des Massenmittelpunktes C

Geg.: m, Θ^{C}, R, g, $M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$

(a) generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = x\ ; \quad q_2 = y\ ; \quad q_3 = \varphi \tag{60}$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}\big(m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Theta^{\mathrm{C}} \dot{\varphi}^2\big) \tag{61}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgx \tag{62}$$

Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Theta^{\mathrm{C}}\dot{\varphi}^2 + mgx \end{aligned} \tag{63}$$

Das Reibmoment soll in der Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} r_\varphi \dot{\varphi}^2 \tag{64}$$

berücksichtigt werden.

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \tag{65}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \Theta^{\mathrm{C}}\ddot{\varphi} \tag{67}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{68}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \tag{69}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{70}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = r_\varphi \dot{\varphi} \tag{71}$$

Zwänge, i.a. $f_k = f_k(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)$:

$$f_1 := x - R\cos\varphi = 0 \tag{72}$$

$$f_2 := y - R\sin\varphi = 0 \tag{73}$$

Daraus resultierende Zwangskräfte:

$$Z_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \text{ also:} \tag{74}$$

$$Z_1 = \lambda_1 \frac{\partial(x - R\cos\varphi)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial(y - R\sin\varphi)}{\partial x} = \lambda_1 \tag{75}$$

$$Z_2 = \lambda_2 \tag{76}$$

$$Z_3 = \lambda_1 R\sin\varphi - \lambda_2 R\cos\varphi \tag{77}$$

Alles eingesetzt in die Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + Z_i \tag{78}$$

führt (mit $i \in \{1, 2, 3\}$) zu den Gleichungen

$$m\ddot{x} - mg = \lambda_1 \tag{79}$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \tag{80}$$

$$\Theta^{\mathrm{C}}\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} = \lambda_1 R\sin\varphi - \lambda_2 R\cos\varphi \tag{81}$$

Zusammen mit den beiden Zwangsbedingungen (72) und (73) ergeben sich fünf Gleichungen für die drei unbekannten Koordinaten x, y und φ und die beiden Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2.

Wir wollen jetzt aus diesem Gleichungssystem durch Einsetzen alle Unbekannten bis auf φ eliminieren. Zunächst werden die Zwangsbedingungen (72) und (73) nach den zu eliminierenden Größen umgestellt

$$x = R\cos\varphi\ ; \quad \dot{x} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{82}$$

$$\ddot{x} = -R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \tag{83}$$

$$y = R\sin\varphi\ ; \quad \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{84}$$

$$\ddot{y} = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \tag{85}$$

und in die Gleichungen (79) und (80) eingesetzt (Gl. (81) enthält weder x noch y):

$$m\big(-R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi - g\big) = \lambda_1 \tag{86}$$

$$m\big(R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\big) = \lambda_2 \tag{87}$$

Jetzt werden mit (86) und (87) die Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2 in Gl. (81) eliminiert:

$$\big(\Theta^{\mathrm{C}} + mR^2\big)\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} + mgR\sin\varphi = 0 \tag{88}$$

Gl. (88) ist die Bewegungsdifferentialgleichung für das System unter Beachtung der Zwänge. Gln. (86) und (87) sind Bestimmungsgleichungen für die Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2. Diese wiederum sind die x- bzw. y-Komponenten der Kraft, die von der Fesselung auf das Pendel wirkt.

(b) generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = r\ ; \quad q_2 = \varphi \tag{89}$$

Geschwindigkeit des Schwerpunkts zur Bestimmung der Kinetischen Energie:

$$\underline{x}_{\mathrm{C}} = r\underline{e}_r \tag{90}$$

$$\underline{v}_{\mathrm{C}} = \dot{\underline{x}}_{\mathrm{C}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \tag{91}$$

$$v_{\mathrm{C}}^2 = \underline{v}_{\mathrm{C}} \cdot \underline{v}_{\mathrm{C}} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{92}$$

($\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$, das kann man durch Bezug auf eine ortsfeste kartesische Basis leicht zeigen.)

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}\left[mv_{\mathrm{C}}^2 + \Theta^{\mathrm{C}}\dot{\varphi}^2\right] = \frac{1}{2}\left[m\dot{r}^2 + (mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\dot{\varphi}^2\right] \tag{93}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgr\cos\varphi \tag{94}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = K - U \tag{95}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi \tag{96}$$

Dissipationsfunktion (wie bei a):

$$D = \frac{1}{2}r_\varphi\dot{\varphi}^2 \tag{97}$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \tag{98}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + (mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\ddot{\varphi} \tag{99}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \tag{100}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgr\sin\varphi \tag{101}$$

$$\frac{\partial D}{\partial r} = 0 \tag{102}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi} = r_\varphi\dot{\varphi} \tag{103}$$

Zwangsbedingungen:

$$f := r - R = 0 \tag{104}$$

Daraus resultierende Zwangskräfte:

$$Z_1 = \lambda\frac{\partial(r-R)}{\partial r} = \lambda \tag{105}$$

$$Z_2 = \lambda\frac{\partial(r-R)}{\partial \varphi} = 0 \tag{106}$$

Alles eingesetzt in die LAGRANGE-Gleichungen 1. Art führt zu:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi = \lambda \tag{107}$$

$$(mr^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = 0 \tag{108}$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung (104) ergeben sich drei Gleichungen für die zwei unbekannten Koordinaten r und φ und den LAGRANGE-Parameter λ.

Durch Einsetzen der Zwangsbedingung Gl. (104) in Gl. (108) ergibt sich folgende Bewegungsdiff'gl. für das System unter Beachtung der Zwänge:

$$(mR^2 + \Theta^{\mathrm{C}})\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} + mgR\sin\varphi = 0 \tag{109}$$

Aus Gl. (107) kann der LAGRANGE-Parameter λ bestimmt werden. λ ist der Betrag der Kraft, der vom Gelenk auf das Pendel wirkt.

Vergleich: Das System hat einen Koordinatenfreiheitsgrad. Die Zahl der Zwangsbedingungen und damit die Zahl der Zwangskraftparameter ist gleich der Zahl der überzähligen Koordinaten.

Im Fall (b) ist die Koordinate $q_2 = \varphi$ eine reine Bewegungskoordinate, sie geht nicht in die Zwangsbedingung(en) ein. Die zugehörige LAGRANGE-Gleichung 1. Art ist von vornherein zwangskraftfrei.

Bemerkung: Es ist nicht bei allen Problemen möglich, die Zwangskraftparameter und alle überzähligen Koordinaten in geschlossener Form zu eliminieren.