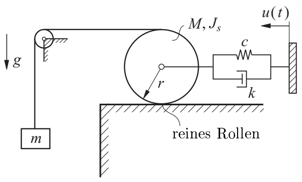
Tutorium

Aufgabe 29

Das skizzierte System (homogene Kreisscheibe M, Θ^S, masselose Umlenkrolle, ideales Seil, Masse m, lineare Feder c, linearer Dämpfer k) erfährt eine Fußpunkterregung $u(t) = \hat{u}\cos\Omega t$.

(a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

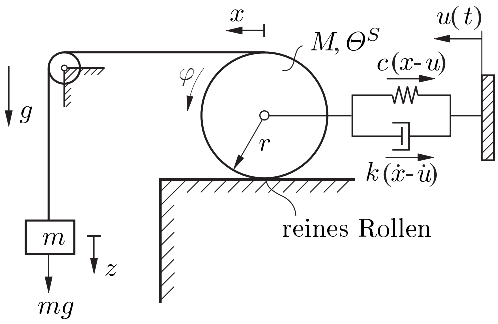
(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Bewegung des Scheibenschwerpunktes mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen 2. Art auf.



Geg.: M, m, $\Theta^S = \frac{1}{2}Mr^2$, c, k, r, $\hat{u}$, Ω, g

(a) Das System hat einen Freiheitsgrad.

(b) Die Verschiebung des Scheibenmittelpunktes sei mit x bezeichnet.



Kinetische und Potentielle Energie:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta^S\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2\ ; \tag{1}$$

$$V = -mgz + \frac{1}{2}c\,(x-u)^2 \tag{2}$$

Kinematik: $\varphi = x/r$ und $z = 2x$

LAGRANGE-Funktion:
(Generalisierte Koordinate: x)

$$L = T - V \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}Mr^2\frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2}m(2\dot{x})^2 + 2\,mgx - \frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{2}cu^2 + cux \tag{4}$$

Generalisierte Kraft:

$$\delta A = -F_D\delta(x-u) = -F_D(\delta x - \underbrace{\delta u}_{=0}) = -F_D\delta x \tag{5}$$

$$\stackrel{!}{=} Q_x\delta x \Rightarrow Q_x = -F_D = -kv_{rel} = -k(\dot{x}-\dot{u}) \tag{6}$$

Alternativ kann man den Dämpfer durch eine Dissipationsfunktion berücksichtigen:

$$D = \frac{k}{2}\,(\dot{x}-\dot{u})^2 \tag{7}$$

Bewegungsdifferentialgleichung:
Wählt man den Ansatz über die generalisierten Kräfte Q_i, gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (q_1 = q = x) \tag{8}$$

Nutzt man hingegen die Dissipationsfunktion D, muß man

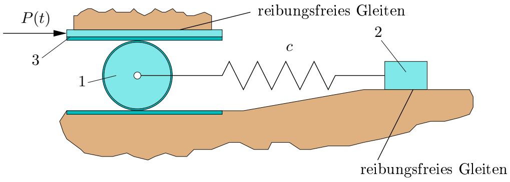
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{9}$$

schreiben. In beiden Fällen gelangt man zur Bewegungsdifferentialgleichung:

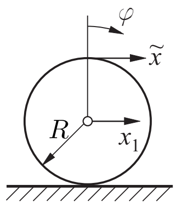
$$\left(\frac{3}{2}M + 4\,m\right)\ddot{x} + k\dot{x} + cx = k\dot{u} + cu + 2mg \tag{10}$$

Aufgabe 32

Das skizziere System besteht aus einem Zahnrad 1 (Masse m_1, Radius R), einer Zahnstange 3 und einem Gleitkörper 2 (Masse m_2). Die Masse der Zahnstange soll vernachlässigt werden. Zudem soll für eine erste Untersuchung des Schwingungsverhaltens auf eine Berücksichtigung der Reibung verzichtet werden.
Durch eine periodische Kraft $P(t)$ wird das System zu Schwingungen angeregt. Bestimme mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen die Bewegungsgleichungen des Systems!



Geg.: m_1, m_2, R, $P(t)$, c



Kinematische Beziehungen:
$\dot{\varphi}_1 = \dot{x}_1/R$ und $\tilde{x} = 2\,x_1$

Massenträgheitsmoment:
$\Theta_1^S = \frac{1}{2}m_1R^2$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_1^S\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \tag{11}$$

Potentielle Energie der Feder:

$$U = \frac{1}{2}\,c\,(x_2 - x_1)^2 \tag{12}$$

Berechnung der generalisierten Kraft:

Virtuelle Arbeit:

$$\delta W = P\delta\tilde{x} = P\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x_1}\,\delta x_1 = P\frac{\partial(2x_1)}{\partial x_1}\,\delta x_1 = 2P\delta x_1 = Q_1\delta x_1$$

$$\Rightarrow \qquad Q_1 = 2P \tag{13}$$

Mit der Lagrange Funktion $L = T - U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \qquad i = 1,2 \tag{14}$$

(11) und (12) und (13) eingesetzt, es ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\frac{3}{2}m_1\ddot{x}_1 - c\,(x_2 - x_1) = 2P(t) \tag{15}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c\,(x_2 - x_1) = 0 \tag{16}$$

Hausaufgabe

Aufgabe 27

Das skizzierte System wird durch das Moment $M(t)$ zum Schwingen angeregt. In der eingezeichneten Position ($x = 0$) sind beide Federn gespannt. Die obere Feder ist um die Länge l_0 gespannt; die untere Feder ist so gespannt, daß $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist. Die Seile seien undehnbar. Es werden ausschließlich kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage betrachtet.

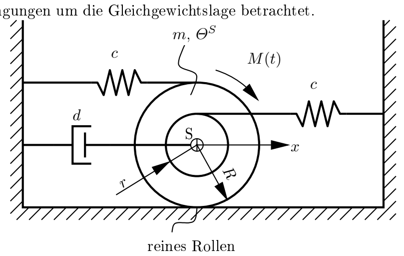
(a) Stellen Sie die kinetische Energie T und potentielle Energie U für das System auf.

(b) Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion D oder die generalisierte Kraft Q.

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung in der Schwerpunktskoordinate x. Um welche Länge muß die untere Feder gespannt sein, damit $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist?

(d) Bestimmen sie die Amplitude der stationären Schwingung!

Geg.: m, Θ^S, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$, M_0, Ω, c, d



(a) Kinematik: In der gezeichneten Lage sind die Federn bereits gespannt. Seien l_0 und l_u die Auslenkungen der oberen bzw. der unteren Feder.

Für das rollende Rad besteht zwischen Drehwinkel φ und Verschiebung des Mittelpunktes der Zusammenhang

$$\varphi = \frac{x}{R} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{R}. \tag{17}$$

Potentiellen und kinetischen Energie:

$$U = \frac{1}{2}c\,(l_0 + 2x)^2 + \frac{1}{2}c\left(l_u - \frac{R+r}{R}x\right)^2 \tag{18}$$

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta^S\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right)\dot{x}^2 \tag{19}$$

(b) Dissipationsfunktion:

$$D = \frac{1}{2}d\dot{x}^2 \tag{20}$$

Alternativ ist die Darstellung über eine generalisierte Kraft möglich:

$$Q_D = \underline{F}_D \frac{\partial \underline{r}_D}{\partial x} = -d\dot{x}\underline{e}_x \cdot \frac{\partial (x\underline{e}_x)}{\partial x} = -d\dot{x}. \tag{21}$$

Das Erregermoment muss über seine generalisierte Kraft in den Formalismus eingefügt werden:

$$Q_M = \underline{M}(t) \cdot \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x} = M(t)\underline{e}_z \cdot \frac{\partial (\varphi \underline{e}_z)}{\partial x} = \frac{M(t)}{R} \tag{22}$$

(c) Lagrange-Funktion:

$$L = K - U \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}c\left[(l_0 + 2x)^2 + \left(l_u - \frac{R+r}{R}x\right)^2\right] \tag{24}$$

Lagrange-Gleichung 2.Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = Q_M \tag{25}$$

$$\text{alternativ:}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_M + Q_D \tag{26}$$

In (25) wird der Einfluss des Dämpfers in der partiellen Ableitung der Dissipationsfunktion berücksichtigt, in (26) geschieht das mittels der generalisierten Kraft Q_D. Im Folgenden wird (25) verwendet.

partielle Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right)\ddot{x} \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c\left(-2(l_0 + 2x) + \frac{R+r}{R}(l_u - \frac{R+r}{R}x)\right) \tag{28}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = d\dot{x} \tag{29}$$

Durch Einsetzen in (25) erhält man die Differentialgleichung:

$$\left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right)\ddot{x} + d\dot{x} + c\left[2\,(l_0 + 2x) - \frac{R+r}{R}\left(l_u - \frac{R+r}{R}x\right)\right] = \frac{M(t)}{R} \tag{30}$$

Im Gleichgewicht gilt $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ und nach Vorgabe auch $x = 0$. Außerdem ist hierfür auch $M(t)$ anzunehmen. Einsetzen dieser Bedingungen in (30) ergibt

$$2l_0 - l_u\frac{R+r}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_u = \frac{2R}{R+r}l_0 \tag{31}$$

Setzt man den Wert für l_u in (30) ein, so folgt:

$$\left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right)\ddot{x} + d\dot{x} + c\left[4 + \left(\frac{R+r}{R}\right)^2\right]x = \frac{M(t)}{R}. \tag{32}$$

Aufgabe 30

Das skizzierte System besteht aus einem starren Körper der Masse m, der auf einer Ebene reibungsfrei gleitet und mit zwei Federn und zwei Dämpfern an die Umgebung gebunden ist. Im Körperschwerpunkt ist ein mathematisches Pendel (Länge l, Masse m) angebracht, das von einem Wind der Geschwindigkeit $\underline{v}_w$ von unten angeblasen wird (Luftwiderstandsbeiwert k). Die Pendelmasse wird durch die Kraft $\underline{P}(t) = P_0 \cos \Omega t \underline{e}_x$ erregt. Die Bewegung verläuft im Erdschwerefeld.

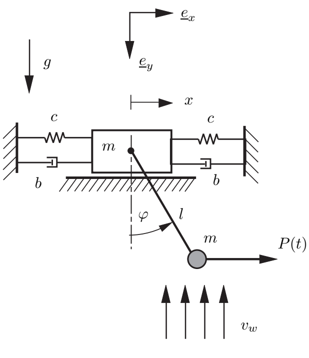
(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten x und φ auf.

(b) Berechnen Sie den Betrag der Relativgeschwindigkeit $|\underline{v}_{rel}|$ zwischen Pendelmasse und Wind.

(c) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.

(d) Geben Sie die generalisierten Nicht-Potentialkräfte Q_x und Q_φ an, die nicht durch D modellierbar sind.

(e) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.



Hinweis: $\underline{v}_{rel} = \underline{v}_m - \underline{v}_w$; $\underline{v}_m$: Geschw. der Pendelmasse, $\underline{v}_w$ Windgeschwindigkeit
Geg.: m, b, c, k, l, g, v_w, P_0, Ω

(a) Kinematik:

$$\underline{r}_1 = x\underline{e}_x \;\Rightarrow\; \underline{v}_1 \equiv \dot{\underline{r}}_1 = \dot{x}\underline{e}_x \tag{33}$$

$$\underline{r}_2 = (x + l\sin\varphi)\underline{e}_x + l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{34}$$

$$\underline{v}_2 = (\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi})\underline{e}_x + (-l\sin\varphi\dot{\varphi})\underline{e}_y \tag{35}$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m\underline{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\Big[\big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}m\big(2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\big) \end{aligned} \tag{36}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgl\cos\varphi + cx^2 \tag{37}$$

LAGRANGE-Funktion:

$$L = K - U \tag{38}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right) + mgl\cos\varphi - cx^2 \tag{39}$$

(b) Relativgeschwindigkeit zwischen Wind und Kugel

$$\underline{v}_{rel} = \underline{v}_m - \underline{v}_w \qquad \underline{v}_w = -v_w\underline{e}_y \tag{40}$$

$$\underline{v}_{rel} = \big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y - \big(-v_w\big)\underline{e}_y$$

$$\underline{v}_{rel} = \big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(v_w - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y \tag{41}$$

$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(v_w - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2}$$

$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\big(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi\big)} \tag{42}$$

(c) Dissipationsfunktion

$$D = b\dot{x}^2 + \frac{1}{3}k|\underline{v}_{rel}|^3 \tag{43}$$

$$D = b\dot{x}^2 + \frac{k}{3}\left[\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\big(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi\big)\right]^{\frac{3}{2}} \tag{44}$$

(d) generalisierte Kräfte:

$$\delta W_p = \underline{P}(t)\underline{e}_x\delta\underline{r}_2 \tag{45}$$

$$= P(t)\underline{e}_x\left(\frac{\partial\underline{r}_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\underline{r}_2}{\partial\varphi}\delta\varphi\right) \tag{46}$$

$$\delta W_p = P(t)\big(\delta x + l\cos\varphi\delta\varphi\big) \tag{47}$$

$$Q_x = P(t) \tag{48}$$

$$Q_\varphi = P(t)l\cos\varphi \tag{49}$$

(e) Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = 2m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{50}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi \tag{51}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx \tag{52}$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{x}} = 2b\dot{x} + \frac{k}{2}|\underline{v}_{rel}|\big(2\dot{x} + 2l\dot{\varphi}\cos\varphi\big) \tag{53}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml\dot{x}\cos\varphi + ml^2\dot{\varphi} \tag{54}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = ml\ddot{x}\cos\varphi - ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + ml^2\ddot{\varphi} \tag{55}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -ml\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi - mgl\sin\varphi \tag{56}$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{2}k|\underline{v}_{rel}|\big(2l^2\dot{\varphi} + 2l(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi)\big) \tag{57}$$

LAGRANGE-Gleichungen 2.Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i} = Q_i \tag{58}$$

Bewegungsdifferentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} &2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2cx + 2b\dot{x} + \\ &+ k|\underline{v}_{rel}|\big(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\big) = P(t) \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} &ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi + mgl\sin\varphi + \\ &+ k|\underline{v}_{rel}|\big(l^2\dot{\varphi} + l(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi)\big) = P(t)l\cos\varphi \end{aligned} \tag{60}$$